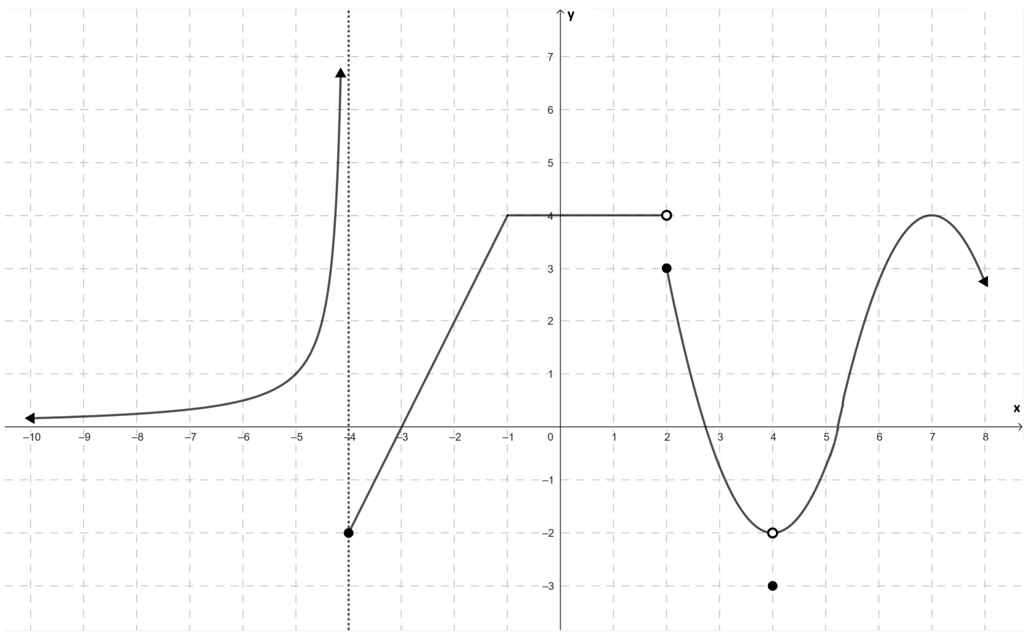
Proyecto MATEM-Cálculo

I Examen Parcial 2024- Solucionario

I parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f, determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. (9 puntos)



1. $f'(7) = \underline{0}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \underline{0}$
3. $\lim\limits_{x\to-4^-} f(x) = \underline{+\infty}$
4. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \underline{4}$
5. $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \underline{-2}$
6. ¿Existe $\lim\limits_{x\to2} f(x)$? No existe (opcional: porque los límites laterales son distintos)
7. La ecuación de la asíntota horizontal. $\underline{y=0}$
8. ¿Cuál es un valor de x donde existe una discontinuidad inevitable? $\underline{-4 \text{ o } 2}$
9. Un valor del dominio donde la función es continua pero no es derivable. $\underline{-1}$

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites. No se permite el uso de la regla de L'Hôpital.

A) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ (5 puntos)

Dicho límite es de la forma $\infty - \infty$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x+2)} = \frac{-1}{4}$$

Distribución de puntos

- (1 punto) Factorizar el denominador.
- (2 puntos)Homogenizar y simplificar.
- (1 punto) Factorizar.
- (1 punto) Simplificar y evaluar.

B) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}\right)$ (6 puntos)

Dicho límite es de la forma $\infty-\infty$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+|x|}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\frac{-1}{2}$$

Distribución de puntos

- (1 punto) Introducir la fracción unitaria.
- (1 punto) Racionalizar y simplificar.
- (1 punto) Factorización de los subradicales y valor absoluto.
- (1 punto) Escoger el criterio del valor absoluto.
- (1 punto) Factorizar.
- (1 punto) Simplificar y evaluar.

C) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\text{sen}(x)}{x-\pi}$. Sugerencia: realice un cambio de variable. (6 puntos)

$$\begin{aligned} Sea\ u &= x-\pi \\ u &\to 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,(u+\pi)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,(u)\cos(\pi)+\cos(u)\,\text{sen}\,(\pi)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,(u)\cdot -1+\cos(u)\cdot 0}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} -1\cdot \frac{\text{sen}\,(u)}{u}$$

$$= -1\cdot 1 = -1$$

Distribución de puntos

- (1 punto) Definición de la sustitución.
- (1 punto) Reescritura del límite.
- (1 punto) Aplicar la identidad trigonométrica.
- (1 punto) Reescritura del criterio.
- (1 punto) Límite trigonométrico especial.
- (1 punto) Respuesta.

2. Considere la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} (x-2)^2 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & si \quad x \neq 2 \\ 0 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

Demuestre que h es continua en $x = 2$. (6 puntos)

Basta demostrar que $h(2) = \lim\limits_{x \to 2} h(x)$. Además, para el cálculo de dicho límite se debe utilizar el teorema de intercalación.

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$-1\,(x-2)^2 \leq (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 1\,(x-2)^2$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 2} -1\,(x-2)^2}_{=0} \leq \lim_{x \to 2} (x-2)^2 \cos\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq \underbrace{\lim_{x \to 2} 1\,(x-2)^2}_{=0}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 2} (x-2)^2 \cos\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = 0$.

Además, la imagen de $x = 2$ es 0, por lo que es igual al límite.

Queda demostrado que la función es continua en $x = 2$.

Distribución de puntos

- (3 puntos) Construcción de la desigualdad para el teorema de intercalación.
- (2 punto) Cálculo de los límites.
- (1 punto) Identificar el valor de la imagen es igual al límite.

3. Calcule la derivada de cada uno de los siguientes criterios de funciones, cada función está definida en su respectivo dominio máximo. No es necesario simplificar.

A) $f(x) = \dfrac{e^{x^2+3}}{\operatorname{sen}(x+1)}$ (4 puntos)

$$f'(x) = \frac{\left[e^{x^2+3}\right]' \cdot \operatorname{sen}(x+1) - e^{x^2+3} \cdot [\operatorname{sen}(x+1)]'}{[\operatorname{sen}(x+1)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2+3} \cdot 2x \cdot \operatorname{sen}(x+1) - e^{x^2+3} \cdot \cos(x+1)}{[\operatorname{sen}(x+1)]^2}$$

Distribución de puntos

- (1 punto) Aplicar regla del cociente.
- (2 puntos) Derivada de la función exponencial y su cadena.
- (1 punto) Derivada de la función trigonométrica y su cadena.

B) $g(x) = \ln\left(\tan(x) + \sqrt{x}\,\right)$ (4 puntos)

$$g'(x) = \frac{1}{\tan(x) + \sqrt{x}} \cdot [\tan(x) + \sqrt{x}\,]'$$

$$g'(x) = \frac{1}{\tan(x) + \sqrt{x}} \cdot \left[\sec^2(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$

Distribución de puntos

- (2 puntos) Derivada de la función logarítmica y su cadena.
- (1 punto) Derivada de la función trigonométrica.
- (1 punto) Derivada de la función radical.

4. Considere la función $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con criterio $j(x) = x^2 - 4x + 3$ y determine lo que se le solicita a continuación.

A) Utilice la definición de derivada para verificar que $j'(x) = 2x - 4$. (5 puntos)

$$j'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) + 3 - (x^2 - 4x + 3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4x - 4h + 3 - x^2 + 4x - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(2x + h - 4)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h - 4) = 2x + 0 - 4 = 2x - 4$$

Distribución de puntos

- (1 punto) Aplicar la definición de derivada a la función j.
- (2 puntos) Efectuar las operaciones del numerador y factorizarlo.
- (1 punto) Simplificar el criterio.
- (1 punto) Calcular el límite.

B) Determine la ecuación de la recta paralela a $y = -x - 6$ y que es tangente a la gráfica de j. (5 puntos)

Como la recta paralela a la tangente tiene ecuación $y = -x - 6$, entonces el valor de la pendiente de la tangente es -1, además, el punto de tangencia cooresponde a $(a, j(a))$, por tanto:

$$j'(a) = -1 \;\to\; 2a - 4 = -1 \;\to\; a = \frac{3}{2}$$

$$j(a) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = \frac{-3}{4}$$

Ecuación de la recta tangente corresponde a:

$$\left(y - \frac{-3}{4}\right) = -1\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y = -x + \frac{3}{4}$$

Distribución de puntos

- (1 punto) Cálculo de la pendiente de la recta paralela a la tangente e igualar a la derivada.
- (2 puntos) Determinar la coordenadas (x, y) del punto de tangencia.
- (2 puntos) Determinar la ecuación de la recta tangente.