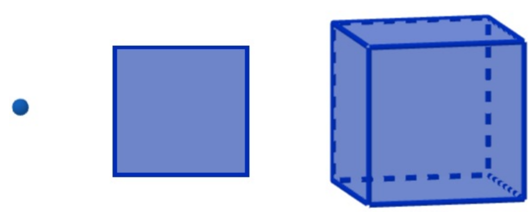
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Precálculo

III Examen parcial 2024



Nombre: ______________________________

Colegio: ______________________________

Código: ______________________________

Fórmula:1

Sábado 7 de setiembre

Indicaciones

1. El tiempo máximo para resolver este examen es de 2 horas y 30 minutos.

2. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.

3. Este examen consta de dos partes: selección única (30 puntos) y desarrollo (10 puntos).

4. La parte de **selección única** debe ser contestada en la **hoja de respuestas** que se le dará para tal efecto. Fírmela en el espacio correspondiente utilizando bolígrafo de tinta azul o negra indeleble.

5. En la **hoja de respuestas** usted deberá rellenar con **lápiz** la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja de respuestas.

6. En el **desarrollo** debe escribir utilizando bolígrafo de tinta azul o negra indeleble, en el espacio indicado: su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

7. En los ítems de **desarrollo** debe aparecer todo el procedimiento que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente **bolígrafo** de tinta azul o negra indeleble. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna pregunta está desordenada, ésta no se calificará.

8. No se permite el uso de calculadora científica o programable. La calculadora que puede utilizar es la que contiene únicamente las operaciones básicas.

9. Las ecuaciones, a menos que se indique lo contrario, deben resolverse en el conjunto de los números reales.

Selección única

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 7^x + 3$. La gráfica de f es asintótica a la recta de ecuación

   A) $y = 7$
   B) $x = 7$
   C) $y = 3$
   D) $x = 3$

2. Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $g(x) = -5 - \pi^x$ y analice las siguientes proposiciones:

   I. La gráfica de g es cóncava hacia abajo.

   II. La gráfica de g no interseca al eje x.

   ¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

   A) Solo la I
   B) Solo la II
   C) Ambas
   D) Ninguna

3. Considere la función $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ j(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x - 2$ y analice las siguientes proposiciones:

   I. $j(-2024) < j(-2023)$.

   II. El ámbito es $[-2, +\infty[$.

   ¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

   A) Solo la I
   B) Solo la II
   C) Ambas
   D) Ninguna

4. Considere la función exponencial $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=a^{2x+1}-3$. Si el par ordenado $\left(0,\dfrac{-8}{3}\right)$ corresponde al corte con el eje y de la gráfica de h, entonces el valor de a corresponde a

   A) $\dfrac{-17}{3}$

   B) $\dfrac{1}{3}$

   C) $\dfrac{-17}{2}$

   D) $\dfrac{1}{2}$

5. Considere la función $k:D_k\to\mathbb{R},\ k(x)=\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$. Si el ámbito de k es $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{25}{16}\right[$, entonces el dominio D_k corresponde al intervalo

   A) $]-2,-1]$

   B) $[-2,-1[$

   C) $]1,2]$

   D) $[1,2[$

6. Considere la función exponencial $m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $m(x)=a\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+b$. Si la gráfica de m es decreciente e interseca al eje x en un punto, ¿cuál de las siguientes proposiciones se puede cumplir?

   A) $a>0$ y $b>0$.

   B) $a>0$ y $b<0$.

   C) $a<0$ y $b>0$.

   D) $a<0$ y $b<0$.

7. Considere la función $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t(x) = -4^{-x}$, el valor de $t(-1) \cdot t(2)$ corresponde a

A) -2

B) 8

C) $\dfrac{1}{64}$

D) $\dfrac{1}{4}$

8. Considere la función $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ h(x) = \log_{\frac{1}{7}}(x + 49)$ y analice las siguientes proposiciones:

I. El corte con el eje x corresponde al punto $(-48, 0)$.

II. El corte con el eje y corresponde al punto $(0, -2)$.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

A) Solo la I
B) Solo la II
C) Ambas
D) Ninguna

9. Considere la función j con dominio D_j, ámbito $]-2, 0]$ y criterio $j(x) = \ln(x)$. El conjunto D_j es igual a

A) $[e^{-2}, 0[$

B) $]e^{-2}, 0]$

C) $[e^{-2}, 1[$

D) $]e^{-2}, 1]$

10. Considere la función $k : D_k \to \mathbb{R}$, con $k(x) = \log_{\frac{5}{2}}(x+3)$ y analice las siguientes proposiciones:

    I. La gráfica de k tiene dominio máximo $]3, +\infty[$.

    II. La gráfica de k es cóncava hacia arriba.

    ¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

    A) Solo la I
    B) Solo la II
    C) Ambas
    D) Ninguna

11. Considere la función f definida en su dominio máximo y codominio $\mathbb{R}$, con criterio $f(x) = \log\left(\frac{7x}{2}\right)$. La gráfica de f es asintótica a la recta de ecuación

    A) $x = 0$

    B) $x = 7$

    C) $x = \frac{7}{2}$

    D) $x = \frac{-7}{2}$

12. Considere una función logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y con criterio $f(x) = \log_a\left(\frac{x}{2}\right)$. Si se sabe que $f(128) = 2$, entonces el valor de $f(4)$ es igual a

    A) 3

    B) 8

    C) $\frac{2}{3}$

    D) $\frac{1}{3}$

13. Considere a la función logarítmica estrictamente decreciente $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_a(x)$ y analice las siguientes proposiciones:

    I. $g\left(\dfrac{a}{2}\right) > 0$.

    II. $g(a) < g(a+1)$.

    ¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

    A) Solo la I
    B) Solo la II
    C) Ambas
    D) Ninguna

14. Si $\ln(a) = 2k$ y $\ln(b) = -k$, entonces $\ln\left(\sqrt[5]{a^3b^2}\right)$ es equivalente a

    A) $\dfrac{-4k}{5}$
    B) $\dfrac{4k}{5}$
    C) $\dfrac{-8k^5}{5}$
    D) $\dfrac{8k^5}{5}$

15. La expresión $\log_{a^2}(x) - 3\log_a(x)$ es equivalente a

    A) $\log_a\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x^3}\right)$
    B) $\log_a\left(\dfrac{1}{x}\right)$
    C) $\log_a\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$
    D) $-\log_{a^2}(x)$

16. Al resolver la ecuación $2^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x-x^2}$, una solución corresponde a

A) $-3-\sqrt{10}$
B) $-3+2\sqrt{2}$
C) -1
D) 3

17. Considere las siguientes proposiciones:

I. $-\log(10^{-3}) = 3$

II. El conjunto solución de $\ln(x^2) = \ln(4)$ es $\{2\}$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

A) Solo la I
B) Solo la II
C) Ambas
D) Ninguna

18. La solución de la ecuación $2^{3x-1} - (0,5)^8 = 0$ corresponde a

A) $\frac{-7}{3}$
B) $\frac{7}{3}$
C) -3
D) 3

19. Considere las siguientes proposiciones:

    I. El radio de un polígono regular inscrito en una circunferencia tiene la misma medida que el radio de dicha circunferencia.

    II. Un octágono regular es un polígono convexo.

    ¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

    A) Solo la I
    B) Solo la II
    C) Ambas
    D) Ninguna

20. Considere un polígono regular en el cual cada ángulo interno mide $120°$. ¿Cuántos lados tiene dicho polígono?

    A) 3
    B) 6
    C) 9
    D) 12

21. ¿Cuál es el nombre de un polígono regular que tiene 27 diagonales en total?

    A) Heptágono
    B) Nonágono
    C) Endecágono
    D) Decágono

22. Considere un polígono regular en el se pueden trazar exactamente 6 diagonales distintas desde un vértice, entonces cada uno de sus ángulos centrales mide

    A) $30°$

    B) $40°$

    C) $90°$

    D) $120°$

23. Sea un polígono regular en el cual cada ángulo externo mide $18°$ y cada lado mide $15\ cm$, entonces, el perímetro de ese polígono es igual a

    A) $270\ cm$

    B) $300\ cm$

    C) $360\ cm$

    D) $400\ cm$

24. Considere un heptágono regular cuyo lado mide $12\ cm$ y su radio mide aproximadamente $13,83\ cm$. Entonces, el área de ese heptágono regular es aproximadamente

    A) $82,98\ cm^2$

    B) $288,96\ cm^2$

    C) $523,32\ cm^2$

    D) $580,86\ cm^2$

25. Si la apotema de un triángulo equilátero mide $2\sqrt{3}\ cm$, entonces su perímetro corresponde a

A) $18\ cm$

B) $24\ cm$

C) $36\ cm$

D) $72\ cm$

26. Si el radio de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia es $10\ cm$, entonces la longitud, en cm, de dicha circunferencia es

A) $5\sqrt{3}$

B) $10\sqrt{3}$

C) $5\pi\sqrt{3}$

D) $10\pi\sqrt{3}$

27. La arista basal de una pirámide de base cuadrada mide $7\sqrt{3}\ cm$ y su altura $18\ cm$. El volumen de esa pirámide es

A) $126\ cm^3$

B) $882\ cm^3$

C) $1323\ cm^3$

D) $1764\ cm^3$

28. Si el volumen de una esfera es de $36\pi\ cm^3$, entonces su diámetro, en cm, mide

A) 3

B) 3π

C) 6

D) 6π

29. Si un cubo, cuyo lado mide 16 cm, se inscribe en un cilindro, entonces el radio de la base del cilindro mide

A) $8\ cm$

B) $8\sqrt{2}\ cm$

C) $16\ cm$

D) $16\sqrt{2}\ cm$

30. Si un cono cuyo radio es de $5\sqrt{3}\ cm$ y su generatriz 14 cm, entonces su volumen, en cm^3 corresponde a

A) 275π

B) 550π

C) 825π

D) 1650π

Proyecto MATEM
Precálculo-
III Examen parcial 2024

Nombre: ______________________________

Colegio: ______________________________

Código: ______________________________

Pregunta	Puntos
D1	
D2	

Fórmula: 1

Sábado 7 de setiembre

II parte: Desarrollo

1. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación: (6 puntos)

$$\log_2(x+2) + \log_2(2-x) = 1$$

2. Calcule el área lateral de una pirámide recta de base hexagonal si su arista de la base mide 12 cm y su arista lateral mide $6\sqrt{5}$ cm. (4 puntos)

Fin del examen

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Proyecto MATEM - Precálculo -
III Examen parcial 2024- Solucionario

Sábado 7 de setiembre

I parte: Selección única

1. $\boxed{\text{C}}$

2. $\boxed{\text{C}}$

3. $\boxed{\text{A}}$

4. $\boxed{\text{B}}$

5. $\boxed{\text{A}}$

6. $\boxed{\text{B}}$

7. $\boxed{\text{D}}$

8. $\boxed{\text{B}}$

9. $\boxed{\text{D}}$

10. $\boxed{\text{D}}$

11. $\boxed{\text{A}}$

12. $\boxed{\text{D}}$

13. $\boxed{\text{A}}$

14. $\boxed{\text{B}}$

15. $\boxed{\text{A}}$

16. $\boxed{\text{C}}$

17. $\boxed{\text{A}}$

18. $\boxed{\text{A}}$

19. $\boxed{\text{C}}$

20. $\boxed{\text{B}}$

21. $\boxed{\text{B}}$

22. $\boxed{\text{B}}$

23. $\boxed{\text{B}}$

24. $\boxed{\text{C}}$

25. $\boxed{\text{C}}$

26. $\boxed{\text{D}}$

27. $\boxed{\text{B}}$

28. $\boxed{\text{C}}$

29. $\boxed{\text{B}}$

30. $\boxed{\text{A}}$

II parte: Desarrollo

1. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación: (6 puntos)

$$\log_2(x+2) + \log_2(2-x) = 1$$

Solución:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \log_2(2+x)(2-x) = 1\\
&\Rightarrow \log_2(4-x^2) = 1\\
&\Rightarrow 2^1 = 4 - x^2\\
&\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Se verifica que tanto $-\sqrt{2}$ como $\sqrt{2}$ son soluciones (y de hecho las únicas) de la ecuación planteada.

$$\therefore S = \{\pm\sqrt{2}\}$$

2. Calcule el área lateral de una pirámide recta de base hexagonal si la arista de la base mide 12 cm y su arista lateral mide $6\sqrt{5}$ cm. (4 puntos)

Solución:

Considerando h como la altura de una cara lateral, por el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = \left(6\sqrt{5}\right)^2 - 6^2$$

$$h^2 = 180 - 36$$

$$h^2 = 144$$

$$h = 12$$

El área lateral es:

$$A_L = \frac{a_b \cdot h}{2} \cdot n$$

$$A_L = \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot 6$$

$$A_L = 432\ cm^2$$