



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática



Cálculo

IV Examen Parcial 2024

Sábado 26 de octubre

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de una única parte de desarrollo y un total de 54 puntos.
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. Anote en su cuaderno de examen las respuestas en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra indeleble. Trabaje con el mayor orden y aseo posible.
6. Para cada ítem debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
7. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule las siguientes integrales. En las integrales definidas calcule el valor exacto.

A) $\int_{-1}^0 \arcsen(x) \, dx$ (9 puntos)

B) $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} \, dx$ (12 puntos)

C) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx$ (9 puntos)

D) $\int \cos^2(x) \cdot \sen^5(x) \, dx$ (8 puntos)

E) $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos(x)}$ (7 puntos)

Sugerencia: considere $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $\sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,
 $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$

2. Determine si la siguiente integral impropia converge o diverge. En caso de ser convergente calcule su valor exacto. Si la integral diverge a un infinito, debe indicarlo con el signo correspondiente. (9 puntos)

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \, dx$$

Fin del examen



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM-Cálculo

IV Examen Parcial 2024 - Solucionario

Desarrollo

1. Calcule las siguientes integrales. En las integrales definidas calcule el valor exacto.

A) $\int_{-1}^0 \arcsen(x) \, dx$ (9 puntos)

Solución:

Integración por partes:

$$u = \arcsen(x) \quad dv = 1 \, dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad v = x$$

Entonces: $\int_{-1}^0 \arcsen(x) \, dx = (\arcsen(x) \cdot x)|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

Sustitución:

$$t = 1 - x^2 \quad dt = -2x \, dx$$

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow t = 1 \quad \text{Si } x = -1 \rightarrow t = 0$$

$$= (\arcsen(x) \cdot x)|_{-1}^0 - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{-2} = (\arcsen(x) \cdot x)|_{-1}^0 + \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \, dt$$

$$= (\arcsen(x) \cdot x)|_{-1}^0 + \frac{1}{2} \cdot \left. t^{\frac{1}{2}} \right|_0^1 = (\arcsen(0) \cdot 0 - \arcsen(-1) \cdot -1) + \left(1^{\frac{1}{2}} - 0^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{-\pi}{2} + 1$$

$$\text{B) } \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx \quad (12 \text{ puntos})$$

Solución:

Fracciones parciales:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 4)} = \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 4)}$$

$$2x^2 - x + 4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$\begin{cases} A + B = 2 & \rightarrow B = 1 \\ C = -1 \\ 4A = 4 & \rightarrow A = 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1x - 1}{x^2 + 4} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1x}{x^2 + 4} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2 + 4| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \end{aligned}$$

$$\text{C) } \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx \quad (9 \text{ puntos})$$

Solución:

Sustitución trigonométrica:

$$\begin{aligned} x &= \sec(\theta) & \rightarrow & dx = \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta \\ x^2 &= \sec^2(\theta) \end{aligned}$$

$$x = 2 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad x = 1 \rightarrow \theta = 0$$

Entonces:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sec^2(\theta) - 1}}{\sec(\theta)} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\tan^2(\theta)} \cdot \sec(\theta) \tan(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\sec^2(\theta) - 1] d\theta = \tan(\theta) - \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} - 0$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

D) $\int \cos^2(x) \cdot \sin^5(x) dx$ (8 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) \cdot \sin^5(x) dx &= \int \cos^2(x) \cdot (\sin^2(x))^2 \sin(x) dx \\ &= \int \cos^2(x) \cdot (1 - \cos^2(x))^2 \cdot \sin(x) dx \end{aligned}$$

Sustitución:

$$\begin{aligned} u = \cos(x) &\rightarrow du = -\sin(x) dx \\ -du &= \sin(x) dx \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} &= \int u^2 \cdot (1 - u^2)^2 \cdot -du = - \int (u^2 - 2u^4 + u^6) du \\ &= - \left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \right) + C = - \left(\frac{\cos^3(x)}{3} - 2\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{\cos^7(x)}{7} \right) + C \end{aligned}$$

E) $\int \frac{dx}{3 + 2 \cos(x)}$ (7 puntos)

Sugerencia: considere $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,
 $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + 2 \cos(x)} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{3 + 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{\frac{3 \cdot (1+t^2) + 2 \cdot (1-t^2)}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{2 dt}{t^2 + 5} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{5}}\right) + C \end{aligned}$$

2. Determine si la siguiente integral impropia converge o diverge. En caso de ser convergente calcule su valor exacto. Si la integral diverge a un infinito, debe indicarlo con el signo correspondiente. (9 puntos)

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

Solución:

Sustitución:

$$\begin{aligned} u = -x^2 &\rightarrow du = -2x dx && \text{si } x = +\infty \rightarrow u = -\infty \\ \frac{-du}{2} &= x dx && \text{si } x = 0 \rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \int_0^{-\infty} e^u \cdot \frac{-du}{2} = \frac{-1}{2} \int_0^{-\infty} e^u du$$

Entonces, al introducir la notación de límites se tiene:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} \int_0^a e^u du = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left. \frac{-1}{2} e^u \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2} e^a - \frac{-1}{2} e^0 = 0 - \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$