UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Cálculo

III Examen Parcial 2024

Sábado 7 de setiembre

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de 2 partes y un total de 54 puntos: respuesta corta (5 puntos) y desarrollo (49 puntos).
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen las respuestas de las 2 partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra indeleble. Trabaje con el mayor orden y aseo posible.
6. En los ítems de **respuesta corta**, usted deberá indicar en el cuaderno de examen el número de ítem así como la respuesta que considera correcta de acuerdo con lo que se solicita. Sólo se calificará la respuesta indicada que se encuentre escrita en el cuaderno de examen.
7. Para responder la parte de **desarrollo** debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
8. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Respuesta Corta

Determine lo que se le solicita a continuación. Un punto por cada respuesta correcta (5 puntos)

1. Sea $h(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$. La expresión $\displaystyle\int_{-2}^{2} h(x)dx - \int_{-2}^{-1} h(x)dx$ escrita como una sola integral definida corresponde a ________

2. Considere a las funciones f y g continuas en sus respectivos dominios. Si:

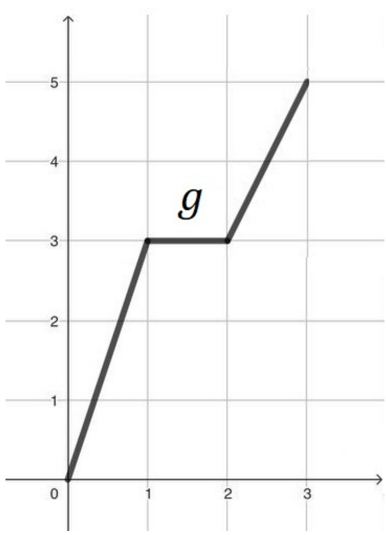
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 g(x)dx = 6$$

Determine el valor de las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^1 \left[4f(x) - \frac{1}{3}g(x)\right] dx =$ ________

ii) $\displaystyle 6\int_1^0 f(x)dx =$________

3. Considere la gráfica de la función g.



Si se sabe que $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$, determine el valor de

i) $G(1) =$ ________

ii) $G'(2) =$________

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Considere $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt$. Calcule el valor de $c \in \mathbb{R}^+$ para el cual $F'(c) = e^{-1}$. (5 puntos)

2. Utilice sumas de Riemann para demostrar que $\displaystyle\int_0^2 3x^2\, dx = 8$. (8 puntos)

3. Determine, mediante el uso de integrales, el criterio de un polinomio $P(x)$ de segundo grado que satisfaga las siguientes condiciones: (8 puntos)

$$P(1) = 3 \qquad P'(1) = 2 \qquad P''(x) = 4$$

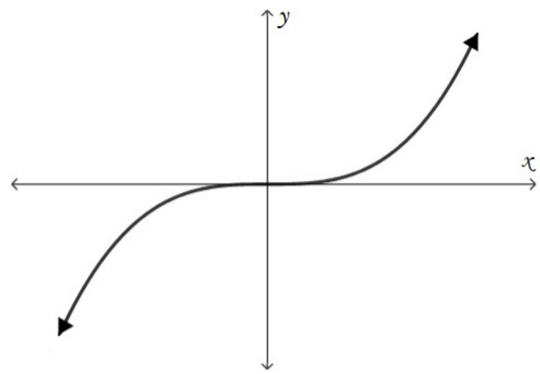
4. Calcule las siguientes integrales. En el caso de las integrales definidas determine el valor exacto.

   A) $\displaystyle\int_0^{\pi} |cos(x)|\, dx$ (5 puntos)

   B) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{x}\,(3 - 2\sqrt{x})} dx$ (6 puntos)

   C) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ (6 puntos)

5. La siguiente es la gráfica de la función con criterio $y = x^3$.



Considere la región R acotada por las gráficas de $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$.

A) Realice un bosquejo de la región R. (2 puntos)

B) Calcule el área de R. (4 puntos)

C) Determine el volumen del sólido generado al girar R en torno al eje y. (5 puntos)

Fin del examen

Proyecto MATEM - Cálculo

III Examen Parcial 2024 - Solucionario

I parte: Respuesta Corta

Determine lo que se le solicita a continuación. Un punto por cada respuesta correcta (5 puntos)

1. Sea $h(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$. La expresión $\displaystyle\int_{-2}^{2} h(x)dx - \int_{-2}^{-1} h(x)dx$ escrita como una sola integral definida corresponde a $\underline{\displaystyle\int_{-1}^{2} h(x)dx}$

2. Considere a las funciones f y g continuas en sus respectivos dominios. Si:

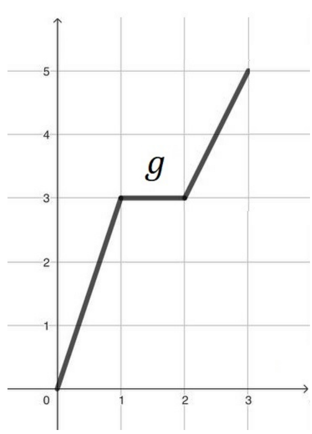
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 g(x)dx = 6$$

Determine el valor de las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_0^1 \left[4f(x) - \frac{1}{3}g(x)\right] dx = \underline{\ 0\ }$

ii) $\displaystyle 6\int_1^0 f(x)dx = \underline{\ -3\ }$

3. Considere la gráfica de la función g.



Si se sabe que $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$, determine el valor de

i) $G(1) = \underline{\ \frac{3}{2}\ }$

ii) $G'(2) = \underline{\ 3\ }$

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Considere $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt$. Calcule el valor de $c \in \mathbb{R}^+$ para el cual $F'(c) = e^{-1}$. (5 puntos)

   Solución:

   $F'(x) = e^{-x^2} \cdot 1 - 0 = e^{-x^2}$

   Ahora,
   $F'(c) = e^{-1}$

   $e^{-c^2} = e^{-1}$

   $-c^2 = -1$

   $0 = c^2 - 1$

   $c = 1$

2. Utilice sumas de Riemann para demostrar que $\displaystyle\int_0^2 3x^2\, dx = 8$. (8 puntos)

   Solución:

   $\triangle x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$

   $x_i = 0 + \dfrac{2}{n} \cdot i = \dfrac{2}{n}i$

   $f(x_i) = 3\left(\dfrac{2}{n}i\right)^2 = \dfrac{12i^2}{n^2}$

   $\triangle x \cdot f(x_i) = \dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{12i^2}{n^2} = \dfrac{24i^2}{n^3}$

   $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\triangle x \cdot f(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{24i^2}{n^3}\right) = \frac{24}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{4(n+1)(2n+1)}{n^2}$

   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (\triangle x \cdot f(x_i)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4(n+1)(2n+1)}{n^2} = 8$

3. Determine, mediante el uso de integrales, el criterio de un polinomio $P(x)$ de segundo grado que satisfaga las siguientes condiciones: (8 puntos)

$$P(1) = 3 \qquad P'(1) = 2 \qquad P''(x) = 4$$

Solución:

Tome $P(x) = ax^2 + bx + c$ el poliniomio de segundo grado, por tanto $P'(x) = 2ax + b$ y $P''(x) = 2a$.

Note que $P''(x) = 4 = 2a$, de lo que se deduce que $a = 2$.

Ahora,
$P'(x) = \displaystyle\int 4\ dx = 4x + b$
$P'(1) = 4 \cdot 1 + b = 2$
$b = -2$

$P(x) = \displaystyle\int (4x - 2)\ dx = \frac{4x^2}{2} - 2x + c$
$P(1) = \dfrac{4(1)^2}{2} - 2(1) + c = 3$
$c = 3$

Criterio del polinomio es $P(x) = 2x^2 - 2x + 3$ 1 punto

4. Calcule las siguientes integrales. En el caso de las integrales definidas determine el valor exacto.

A) $\displaystyle\int_0^{\pi} |cos(x)|\, dx$ (5 puntos)

Solución:

Sugerencia: tome como referencia la gráfica de coseno.

Forma 1:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -cos(x)dx$$

$$= sen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - sen(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(sen(\tfrac{\pi}{2}) - sen(0)\right) - \left(sen(\pi) - sen(\tfrac{\pi}{2})\right)$$

$$= 2$$

Forma 2:

$$\int_0^{\pi} |cos(x)|\, dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx$$

$$= 2 \cdot sen(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 \cdot \left(sen(\tfrac{\pi}{2}) - sen(0)\right)$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

B) $\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{x}\,(3-2\sqrt{x})}dx$ (6 puntos)

Solución:

Sustitución: $\begin{aligned} u &= 3-2\sqrt{x} \\ du &= \frac{-1}{\sqrt{x}}\,dx \end{aligned}$

$$= \int \frac{1}{u}du$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln|3-2\sqrt{x}| + C$$

C) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ (6 puntos)

Solución:

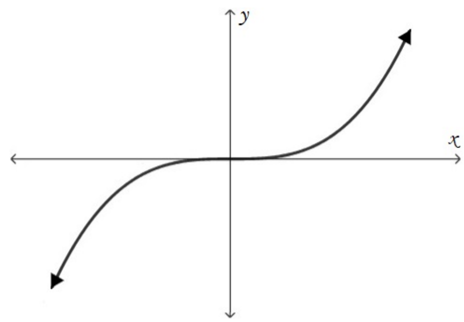
Sustitución: $\begin{aligned} u &= \frac{1}{x} \\ du &= \frac{-1}{x^2}\,dx \\ -du &= \frac{1}{x^2}\,dx \end{aligned}$

$$= \int e^u \cdot -du$$

$$= -e^u + C$$

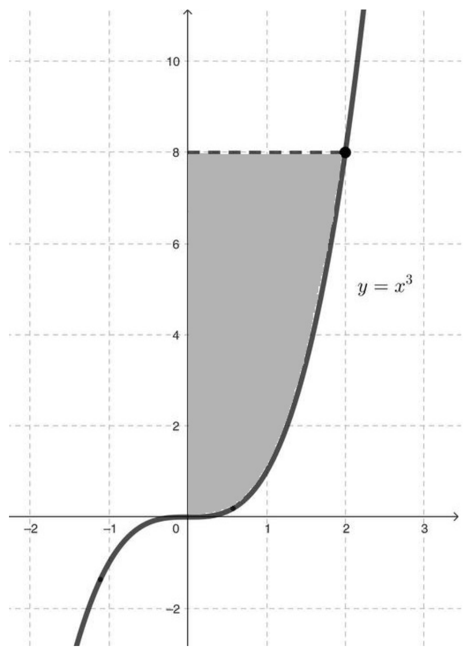
$$= -e^{\frac{1}{x}} + C$$

5. La siguiente es la gráfica de la función con criterio $y = x^3$.



Considere la región R acotada por las gráficas de $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$.

A) Realice un bosquejo de la región R. (2 puntos)



B) Calcule el área de R. (4 puntos)

Solución:
Forma 1:

$$\int_0^2 \left(8 - x^3\right) dx$$

$$= \left(8x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

$$= 8 \cdot 2 - \frac{16}{4} - 0 = 12$$

Forma 2:

$$\int_0^8 \left(y^{\frac{1}{3}}\right) dy$$

$$= \left(\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^8$$

$$= \frac{8^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 0 = 12$$

C) Determine el volumen del sólido generado al girar R en torno al eje y. (5 puntos)

Solución:

$$V = \pi \cdot \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy$$

$$= \pi \cdot \int_0^8 (y)^{\frac{2}{3}} dy$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_0^8$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{8^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 0\right) = \frac{96\pi}{5}$$