Cálculo
II Examen Parcial 2024

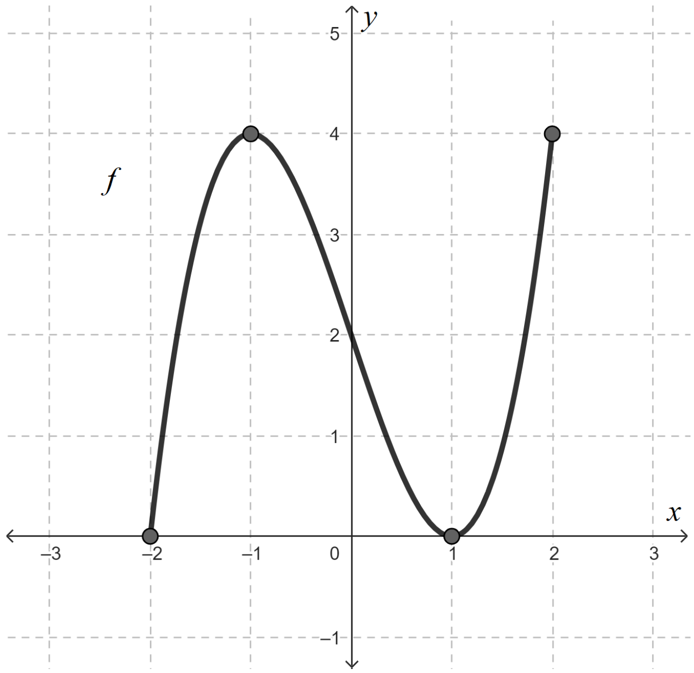
Sábado 22 de junio

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de 2 partes: respuesta corta (4 puntos) y desarrollo (43 puntos), para un total de 47 puntos.
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen las respuestas de las dos partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible.
6. Para responder la parte de desarrollo debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
7. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f, determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen.



Determine:

a) Un valor de x donde $f'(x) = 0$. (1 punto)

b) Un intervalo donde, simultáneamente, se cumple que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. (1 punto)

c) Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema de Rolle. (1 punto)

d) La cantidad de valores de x en el intervalo $[-2, 2]$ que cumplen con el Teorema del Valor Medio. (1 punto)

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Utilice la Regla de L'Hôpital para calcular el valor exacto del siguiente límite. (5 puntos)

$$\lim_{x \to 0} \frac{2}{2^x - 1} \cdot \arctan(x)$$

2. Considere la función $f : \left[\frac{1}{10}, \frac{6}{5}\right] \to \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = x^x$.

   A) Demuestre que el criterio de f' corresponde a $f'(x) = x^x\,(1 + \ln x)$. (6 puntos)

   B) Determine los valores de x donde se alcanzan, respectivamente, el máximo y el mínimo absoluto de la función. (6 puntos)

   C) Determine el criterio de f'' (sin simplificar), así como el valor exacto de $f''(1)$. (4 puntos)

3. Suponga que una fábrica determinó que la utilidad económica U que percibe mensualmente en colones se modela mediante la expresión $U(q) = -q^4 + 800q^2$, donde q representa la cantidad de unidades producidas y vendidas de cierto artículo. Determine la cantidad de artículos que se deben producir y vender para que las utilidades mensuales de la fábrica sean máximas. (7 puntos)

4. Si el área de un triángulo equilátero está dado por la fórmula $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$ y la medida del lado aumenta con una rapidez de 0,5 cm por segundo, determine con qué rapidez aumenta el área de un triángulo equilátero en el momento en que la medida de su lado es de 10 cm. (Indique las unidades de medida) (6 puntos)

5. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ y la siguiente información:

   - $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x+1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{18}{(x+1)^3}$
   - $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x) - x) = -1$
   - Tabla de signos:

	$-\infty$ a -4	-4 a -1	-1 a 2	2 a $+\infty$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$

   Determine lo que se le solicita a continuación con respecto a la gráfica de la función f:

   A) Las ecuaciones de las asíntotas. (2 puntos)

   B) Los intervalos de monotonía. (2 puntos)

   C) Los puntos extremos relativos. (2 puntos)

   D) Los intervalos de concavidad. (3 puntos)

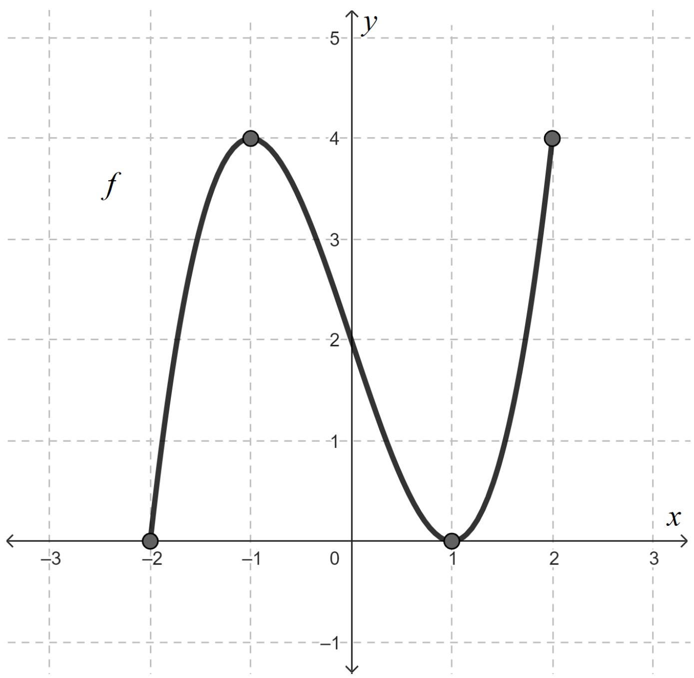
Fin del examen

Proyecto MATEM-Cálculo

I Examen Parcial 2022- Solucionario

I parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f, determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. (1 punto por cada respuesta correcta)



Determine:

a) Un valor de x donde $f'(x) = 0$. $\underline{-1 \text{ o } 1}$

b) Un intervalo donde, simultáneamente, se cumple que $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$. $\underline{]-2,-1[\text{ o cualquier subintervalo}}$

c) Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema de Rolle. $\underline{[-2, 1] \text{ o } [-1, 2]}$

d) La cantidad de valores de x en el intervalo $[-2, 2]$ que cumplen con el Teorema del Valor Medio. $\underline{\text{Hay } 2}$

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Utilice la Regla de L'Hôpital para calcular el valor exacto del siguiente límite. (5 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{2^x-1}\cdot \arctan(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{2^x-1}\cdot \arctan(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2\arctan(x)}{2^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \dfrac{1}{1+x^2}}{2^x\ln(2)} = \frac{2\cdot \dfrac{1}{1+0^2}}{2^0\ln(2)} = \frac{2}{\ln(2)}$$

2. Considere la función $f:\left[\dfrac{1}{10},\dfrac{6}{5}\right]\to\mathbb{R}$ con criterio $f(x)=x^x$.

   A) Demuestre que el criterio de f' corresponde a $f'(x)=x^x\,(1+\ln x)$. (6 puntos)

   <u>Forma 1</u>

   $$y=x^x \quad\to\quad \ln y=\ln\left(x^x\right) \quad\to\quad \ln y = x\cdot\ln(x)$$

   Derivada

   $$\frac{y'}{y}=1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x} \quad\to\quad y'=y\left[1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right] \quad\to\quad y'=x^x\left[\ln(x)+1\right]$$

   <u>Forma 2</u>

   $$y=x^x=e^{\ln(x^x)}=e^{x\cdot\ln(x)}$$

   Derivada

   $$y'=e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left[x\cdot\ln(x)\right]'=e^{x\cdot\ln(x)}\cdot\left[1\cdot\ln(x)+x\cdot\frac{1}{x}\right]=x^x\left[\ln(x)+1\right]$$

B) Determine los valores de x donde se alcanzan, respectivamente, el máximo y el mínimo absoluto de la función. (6 puntos)

Intervalo: $\left[\frac{1}{10}, \frac{6}{5}\right]$

Números críticos:

$f'(x) = x^x\left[\ln(x) + 1\right]$
$f'(x)$ se indefine si $x \leq 0$, pero dichos valores no están dentro del intervalo.
$f'(x) = 0$ si $\ln(x) + 1 = 0 \longleftrightarrow \ln(x) = -1 \longleftrightarrow e^{-1} = x$

Imágenes:
$f\left(e^{-1}\right) = \left(e^{-1}\right)^{e^{-1}} \approx 0{,}69$

$f\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0{,}79$

$f\left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{6}{5}} \approx 1,24$

El mínimo absoluto se alcanza cuando $x = e^{-1}$ y el máximo absoluto se alcanza cuando $x = \frac{6}{5}$.

C) Determine el criterio de f'' (sin simplificar), así como el valor exacto de $f''(1)$. (4 puntos)

$f''(x) = \left[x^x\left(\ln(x) + 1\right)\right]'$

$f''(x) = \left[x^x\right]'\left(\ln(x) + 1\right) + x^x\left[\ln(x) + 1\right]'$

$f''(x) = x^x\left(\ln(x) + 1\right)\left(\ln(x) + 1\right) + x^x\left[\frac{1}{x}\right]$

$f''(1) = 1^1\left(\ln(1) + 1\right)\left(\ln(1) + 1\right) + 1^1\left[\frac{1}{1}\right] = 2$

3. Suponga que una fábrica determinó que la utilidad económica U que percibe mensualmente en colones se modela mediante la expresión $U(q) = -q^4 + 800q^2$, donde q representa la cantidad de unidades producidas y vendidas de cierto artículo. Determine la cantidad de artículos que se deben producir y vender para que las utilidades mensuales de la fábrica sean máximas. (7 puntos)

$U(q) = -q^4 + 800q^2$

$U'(q) = -4q^3 + 1600q \quad \rightarrow \quad -4q^3 + 1600q = 0 \quad \rightarrow \quad q_1 = 20 \;\; q_2 = -20 \;\; q_3 = 0$

Nótese que solamente $q_1 = 20$ tiene sentido para el contexto del ejercicio, por lo tanto los otros dos números críticos se descartan.

Verificación de que el número crítico se asocia a un máximo (puede ser el criterio de la 1er o 2da derivada)
$U''(20) < 0$

Se deben producir y vender 20 artículos para que las utilidades mensuales de la fábrica sean máximas.

4. Si el área de un triángulo equilátero está dado por la fórmula $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$ y la medida del lado aumenta con una rapidez de 0,5 cm por segundo, determine con qué rapidez aumenta el área de un triángulo equilátero en el momento en que la medida de su lado es de 10 cm. (Indique las unidades de medida) (6 puntos)

Datos:
l indica la medida del lado en centímetros que varía con el tiempo $\rightarrow$ En algún instante $l = 10cm$

$\dfrac{dl}{dt} = 0{,}5\, cm/s$ razón de cambio del lado que aumenta.

¿ $\dfrac{dA}{dt}$?

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

Derivada:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2l\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{dl}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{4} \cdot 0{,}5 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33$$

La rapidez con la que aumenta el área de dicho triángulo equilátero es de $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm^2/s o aproximadamente 4,33 cm^2/s.

5. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ y la siguiente información:

- $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x+1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{(x+4)(x-2)}{(x+1)^2}$ $\quad f''(x) = \dfrac{18}{(x+1)^3}$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ $\quad \lim\limits_{x\to \pm\infty} (f(x) - x) = -1$
- Análisis de signos de f':

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & -\infty \quad -4 & & -1 & 2 \quad +\infty \\
f' & + & - & - & + \\
\end{array}$$

Determine lo que se le solicita a continuación con respecto a la gráfica de la función f:

A) Las ecuaciones de las asíntotas. (2 puntos)

Asíntota vertical: $x = -1$
Asíntota oblicua: $y = x - 1$

B) Los intervalos de monotonía. (2 puntos)

Creciente:$]-\infty, -4[$, $]2, +\infty[$
Decreciente: $]-4, -1[$, $]-1, 2[$

C) Los puntos extremos relativos. (2 puntos)

Máximo relativo: $(-4, f(-4)) = (-4, -8)$
Mínimo relativo: $(2, f(2)) = (2, 4)$

D) Los intervalos de concavidad. (3 puntos)

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & -\infty \qquad -1 & \qquad +\infty \\
f'' & - & + \\
\end{array}$$

Cóncavo hacia arriba: $]-1, +\infty[$
Cóncavo hacia abajo: $]-\infty, -1[$