UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

III Examen Parcial
Cálculo
Proyecto MATEM 2020

Pregunta 1

Analice las siguientes proposiciones y determine si son falsas o verdaderas

$$\int dx = C$$

Elegir...

$$\int k \cdot (f(x) + g(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx - k \cdot \int g(x)\, dx$$, con k una constante.

Elegir...

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$ para todo $n \in \mathbb{R}$

Elegir...

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f'(x)| + C$$

Elegir...

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = arcsen(x) + C$$

Elegir...

Sea $f(x) = a^x$ una función exponencial bien definida en su dominio máximo, entonces

$$\int f(x)\, dx = \frac{a^{x+1}}{x+1} + C$$

Elegir...

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$, para todo $k \in \mathbb{R}$

Elegir...

$$\int 0 dx = C$$

Elegir...

$$\int \sec(x)\tan(x) dx = \frac{1}{\cos(x)} + C$$

Elegir...

$$\int sen(x) dx = \cos(x) + C$$

Elegir...

La respuesta correcta es:

$$\int dx = C$$

$\rightarrow$ Falso, $\int k \cdot (f(x) + g(x))\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx - k \cdot \int g(x)\, dx$, con k una constante.

$\rightarrow$ Falso, $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para todo $n \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Falso, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f'(x)| + C$

$\rightarrow$ Falso, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = arcsen(x) + C$

$\rightarrow$ Falso, Sea $f(x) = a^x$ una función exponencial bien definida en su dominio máximo, entonces $\int f(x)\, dx = \frac{a^{x+1}}{x+1} + C$

$\rightarrow$ Falso,
$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$, para todo $k \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Verdadero, $\int 0 dx = C$

$\rightarrow$ Verdadero, $\int \sec(x)\tan(x) dx = \frac{1}{\cos(x)} + C$

→ Verdadero, $\int sen(x)dx = \cos(x) + C$

→ Falso

Pregunta 2

Sea f una función que cumple que $f(x) = \int (x^5 + 1)dx$ y $f(-1) = 3$, entonces el criterio de $f(x)$ corresponde a

Seleccione una:

- $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + x + \dfrac{23}{6}$
- $f(x) = -\dfrac{x^6}{6} + x + \dfrac{25}{6}$
- $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + x + 3$
- $f(x) = \dfrac{x^6}{6} - x + \dfrac{13}{6}$

La respuesta correcta es: $f(x) = \dfrac{x^6}{6} + x + \dfrac{23}{6}$

Pregunta 3

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Calcule la integral $\int (x+1)(3x-2)dx$

Seleccione una:

- $x^3+\dfrac{x^2}{2}+2x+C$
- $x^3+\dfrac{x^2}{2}-2x+C$
- $-x^3+\dfrac{x^2}{2}+2x+C$
- $-x^3+\dfrac{x^2}{2}-2x+C$

La respuesta correcta es: $x^3+\dfrac{x^2}{2}-2x+C$

Pregunta 4

La solución general de la siguiente integral

$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{x}}\,dx$$

Corresponde a:

Seleccione una:

- $3\ln|\sqrt{x}|+5x+C$
- $2\sqrt{x^3}-10\sqrt{x}+C$
- $3\sqrt{x}-5x+C$
- $\ln|\sqrt{x}|+-5\ln|\sqrt{x}|+C$

La respuesta correcta es: $2\sqrt{x^3}-10\sqrt{x}+C$

Pregunta 5

Sea f integrable en $[a,b]$ y sea $k \in \mathbb{R}$.

Considere las siguientes proposiciones:

I. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

II. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

Seleccione una:

- Solo la II
- Ninguna
- Solo la I
- Ambas

La respuesta correcta es: Ambas

Pregunta 6

Sean f, g, h integrables en $I = [m, n]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ para todo x en I. Considere las siguientes proposiciones:

I. $\int_m^n [f(x) + h(x)]\,dx = \int_m^n f(x)\,dx + \int_m^n h(x)\,dx$

II. $\int_m^n f(x)\,dx \leq \int_m^n g(x)\,dx$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

Seleccione una:

- Solo la II
- Ninguna
- Solo la I
- Ambas

La respuesta correcta es: Solo la I

Pregunta 7

Suponga que f es integrable en $[-1,\pi]$. Si $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 4$, $\int_{\pi}^{2} f(x)dx = \frac{-1}{5}$ y $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx = 9$, entonces el valor de $\int_{0}^{2} f(x)dx$ es

Seleccione una:

- $\frac{24}{5}$
- $\frac{-39}{20}$
- $\frac{26}{5}$
- $\frac{-31}{20}$

La respuesta correcta es: $\frac{24}{5}$

Pregunta 8

El valor de la integral $\int_{2}^{5}(-3v+4)dv$

Seleccione una:

- $\frac{39}{2}$
- $\frac{-39}{2}$
- $\frac{2}{39}$
- $\frac{-2}{39}$

La respuesta correcta es: $\frac{-39}{2}$

Pregunta 9

La sustitución elemental más adecuada para resolver la siguiente integral:

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

corresponde a

Seleccione una:

- $u=x-1$
- $u=x$
- $u=\sqrt{x-1}$
- $u=x^2$

La respuesta correcta es: $u=x-1$

Pregunta 10

Sea $f(x)$ una función continua. Al realizar la sustitución $u = x^2$ en la siguiente integral:

$$\int_4^9 4x\, f(x^2)\, dx$$

La integral se transforma en

Seleccione una:

- $\int_2^3 4\sqrt{u}\, f(u)\, du$
- $\int_4^9 2\, f(u)\, du$
- $\int_{16}^{81} 2\, f(u)\, du$
- $\int_4^9 4\sqrt{u}\, f(u)\, du$

La respuesta correcta es: $\int_{16}^{81} 2\, f(u)\, du$

Pregunta 11

En la siguiente integral se va a utilizar la técnica de integración por partes:

$$\int x^3 e^{-x}\, dx$$

Las partes mas adecuadas para resolver la integral corresponden a:

Seleccione una:

- $u = xe^{-x}$ y $dv = x^2 dx$
- $u = x^3$ y $dv = e^{-x} dx$
- $u = e^{-x}$ y $dv = x^3 dx$
- $u = x^2$ y $dv = xe^{-x} dx$

La respuesta correcta es: $u = x^3$ y $dv = e^{-x} dx$

Pregunta 12

Al utilizar el método de integración por partes con $u = x^2$, $dv = cos(x)\,dx$ en la siguiente integral:

$$\int x^2\, cos(x)\, dx$$

La integral se transforma en

Seleccione una:

- $2x\, cos(x) - \int x^2\, sen(x)\, dx$
- $x^2\, sen(x) - 2\int x\, sen(x)\, dx$
- $2x\, sen(x) - \int x^2\, sen(x)\, dx$
- $x^2\, cos(x) - \int x\, sen(x)\, dx$

La respuesta correcta es: $x^2\, sen(x) - 2\int x\, sen(x)\, dx$

Pregunta **13**

Al utilizar el método de integración por partes con $u = x^2, dv = e^x\,dx$ en la siguiente integral:

$$\int_0^3 x^2\,e^x\,dx$$

La integral se transforma en

Seleccione una:

- $2x\,e^x - \int_0^9 x\,e^x\,dx$
- $x^2\,e^x - 2\int_0^3 x\,e^x\,dx$
- $9e^3 - 2\int_0^3 x\,e^x\,dx$
- $18e^9 - 2\int_0^9 x\,e^x\,dx$

La respuesta correcta es: $9e^3 - 2\int_0^3 x\,e^x\,dx$

Pregunta **14**

Observe a continuación la solución parcial de la integral

$$\int cos(5x)\cdot e^{sen(5x)}\,dx$$

$$= \frac{e^{sen(5x)}}{(\quad)} + c$$

El espacio en blanco corresponde a la expresión:

Seleccione una:

- $\frac{1}{5}$
- 5
- $5\cdot sen^4(x)$
- $sen(5x)$

La respuesta correcta es: 5

Pregunta **15**

Una sustitución conveniente para calcular

$$\int \frac{e^{tan(x)}}{cos^2(x)}\,dx$$

corresponde a

Seleccione una:

- $u = cos(x)$
- $u = tan(x)$
- $u = sec(x)$
- $u = sec^2(x)$

La respuesta correcta es: $u = tan(x)$

Pregunta **16**

El valor de la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\,dx$$

corresponde a

Seleccione una:

- $\frac{1}{5}arcsen(\frac{x}{5}) + C$
- $arcsen(\frac{x}{25}) + C$
- $arcsen(\frac{x}{5}) + C$
- $\frac{1}{25}arcsen(\frac{x}{5}) + C$

La respuesta correcta es: $arcsen(\frac{x}{5}) + C$

Pregunta 17

Una sustitución conveniente para calcular

$$\int \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

corresponde a

Seleccione una:

- $u = \sqrt{1-x^2}$
- $u = 1-x^2$
- $u = \sqrt{arcsen(x)}$
- $u = arcsen(x)$

La respuesta correcta es: $u = arcsen(x)$

Pregunta 18

La sustitución trigonométrica más adecuada para resolver la siguiente integral:

$$\int x^2 \sqrt{4+x^2}\, dx$$

con $\theta \in [0, \pi/2[$ corresponde a

Seleccione una:

- $x = 2\, sec(\theta)$
- $x = 2\, sen(\theta)$
- $x = 2\, csc(\theta)$
- $x = 2\, tan(\theta)$

La respuesta correcta es: $x = 2\, tan(\theta)$

Pregunta 19

Al realizar la sustitución trigonométrica $x = 4\, sen\, \theta$ para $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ en $\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$, la integral se transforma en

Seleccione una:

- $4 \int cos^2\theta\, d\theta$
- $16 \int \cos^2 \theta\, d\theta$
- $16 \int sen\theta \cos\theta\, d\theta$
- $4 \int \cos\theta\, d\theta$

La respuesta correcta es: $16 \int \cos^2 \theta\, d\theta$

Pregunta 20

Considere que se tiene una integral indefinida I en la cual se a realizado la sustitución trigonométrica $x = 2sen(\theta)$ para $\theta \in]0, \pi/2[$. En el proceso de solución ha llegado a $I = -\cot(\theta) - \theta + C$. Entonces, la solución completa de I, expresada en términos de la variable original, corresponde a

Seleccione una:

- $-\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x} - arcsen\,(x) + C$
- $-\dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{x} - arcsen\,(x) + C$
- $-\dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{x} - arcsen\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$
- $-\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x} - arcsen\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

La respuesta correcta es: $-\dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x} - arcsen\left(\dfrac{x}{2}\right) + C$

Pregunta **21**

Considere la siguiente integral:

$$\int \frac{5x^3+7x+2}{x^4+9x^2}\,dx$$

La descomposición de esta integral en otras de fracciones más simples, donde A, B, C y D representan números reales constantes, corresponde a

Seleccione una:

- $\int \frac{A}{x^2}\,dx + \int \frac{B}{(x+3)^2}\,dx$
- $\int \frac{A}{x^2}\,dx + \int \frac{B}{x}\,dx + \int \frac{C}{x^2+9}\,dx$
- $\int \frac{A}{x^2}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+9}\,dx$
- $\int \frac{A}{x^2}\,dx + \int \frac{B}{x}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+9}\,dx$

La respuesta correcta es:

$$\int \frac{A}{x^2}\,dx + \int \frac{B}{x}\,dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+9}\,dx$$

Pregunta 22

Considere una integral indefinida I en la cual se ha utilizado el método de fracciones parciales por lo que se ha obtenido que $I = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{1+(x+1)^2} \right) dx$.

Entonces al calcular la integral se obtiene la expresión

Seleccione una:

- $2\ln|x+1| + \ln|2x+2| + \arctan(x) + C$
- $2\ln|x+1| + \ln|x^2+x+1| - \dfrac{1}{(x+1)+1} + C$
- $2\ln|x+1| + \ln|x^2+x+1| + \arctan(x+1) + C$
- $\ln|x+1| + 2\ln|x^2+x+1| + \arctan(x+1) + C$

La respuesta correcta es: $2\ln|x+1| + \ln|x^2+x+1| + \arctan(x+1) + C$

Pregunta 23

El valor de $\int_{-1}^{2} -a\,|x|dx$, con a una constante real, corresponde a

Seleccione una:

- $\dfrac{5a}{2}$
- $\dfrac{-5a}{2}$
- $\dfrac{-3a}{2}$
- $\dfrac{3a}{2}$

La respuesta correcta es: $\dfrac{-5a}{2}$

Pregunta 24

Observe a continuación la solución parcial de la integral

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \frac{2}{(\quad)} \cdot 5^{\sqrt{x}} + C$$

El espacio en blanco corresponde a la expresión:

Seleccione una:

- $\ln(5)$
- $\sqrt{x}$
- x
- 5

La respuesta correcta es: $\ln(5)$

Pregunta 25

Lo que debe hacerse para resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$$

corresponde a

Seleccione una:

- La sustitución $u = x^3$
- Las partes $u = \sqrt{1-x^8},\ dv = 4x^3\,dx$
- La sustitución $u = x^4$
- Las partes $u = 4x^3, dv = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^8}}\,dx$

La respuesta correcta es: La sustitución $u = x^4$

Pregunta **26**

Si $f(x)$ es una función continua y $h(x) = f'(x)$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$, entonces el valor de la integral:

$$\int_0^1 f(x)h(x)\,dx$$

corresponde a

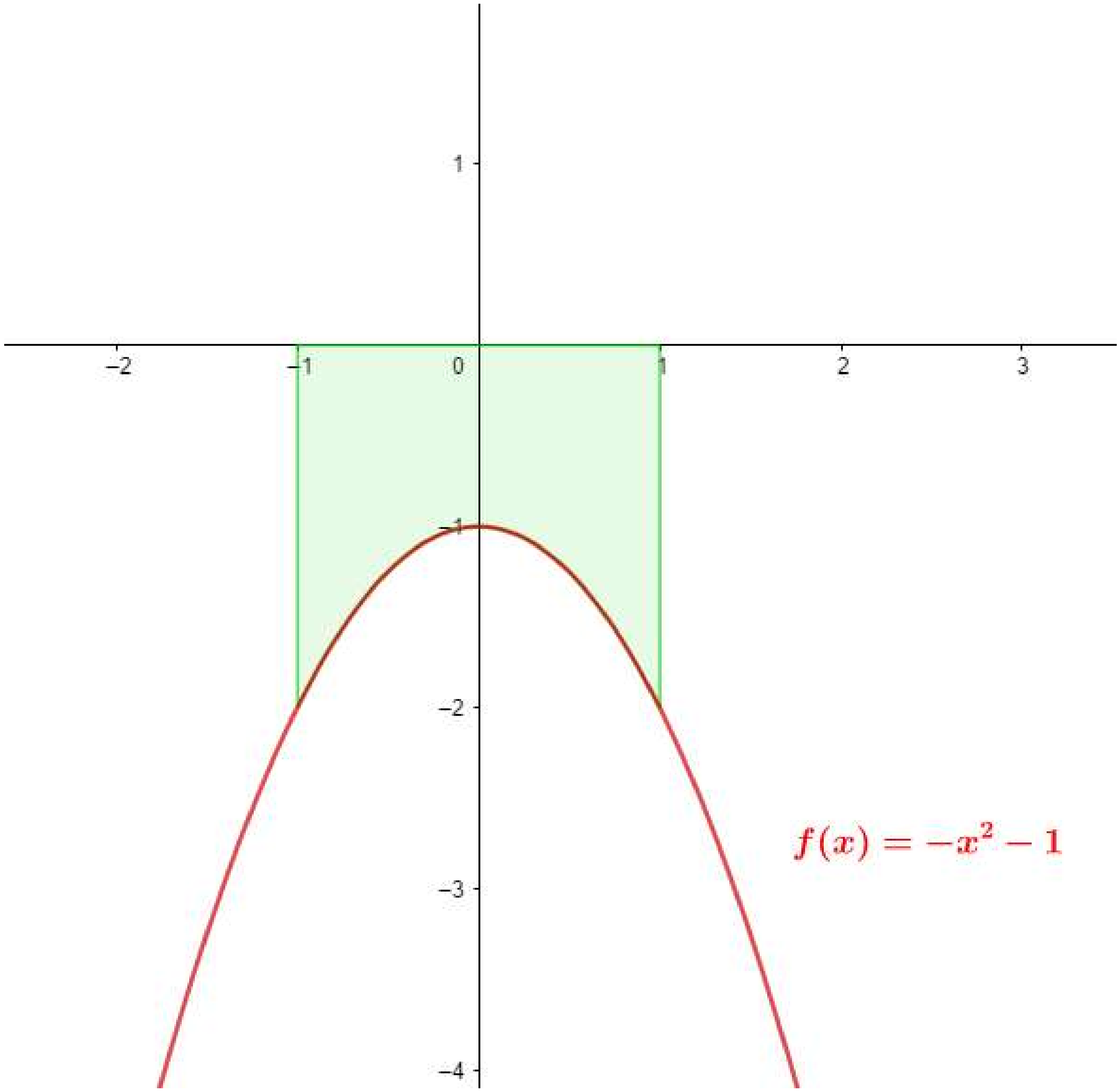
Seleccione una:

- $$\frac{h^2(1) - h^2(0)}{2}$$
- $f(1) - f(0)$
- $$\frac{f^2(1) - f^2(0)}{2}$$
- $f(1)h(1) - f(0)h(0)$

La respuesta correcta es: $\frac{f^2(1) - f^2(0)}{2}$

Pregunta 27

Observe la siguiente figura:



La integral que permite calcular el área de la región sombreada corresponde a

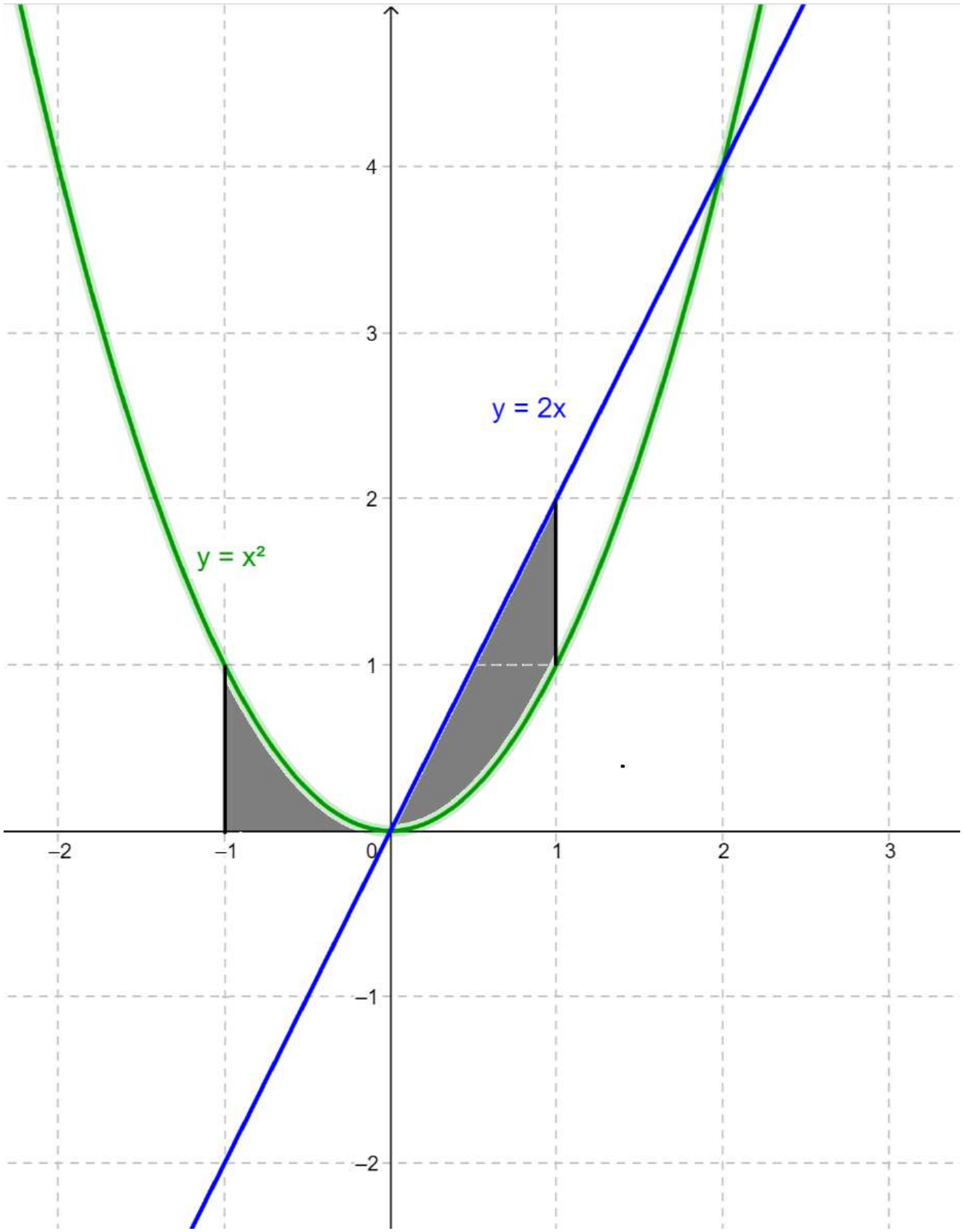
Seleccione una:

- $\int_{-1}^{1} (-x^2 - 1)\, dx$
- $\int_{-1}^{1} -x^2\, dx$
- $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\, dx$
- $\int_{1}^{-1} (x^2 + 1)\, dx$

La respuesta correcta es: $\int_{-1}^{1} (x^2 + 1)\, dx$

Pregunta 28

Considere la imagen que aparece a continuación:



La expresión que permite calcular el área de la región sombreada corresponde a

Seleccione una:

- $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^2 \left(2x - x^2\right)\,dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^0 2x\,dx + \int_0^1 \left(2x - x^2\right)\,dx$

$$\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_0^1 \left(x^2 - 2x\right)\,dx$$

$$\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_0^1 \left(2x - x^2\right)\,dx$$

La respuesta correcta es: $\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_0^1 \left(2x - x^2\right)\,dx$

Pregunta **29**

Considere las curvas:

$y = -x + 3$

Eje x

Recta $x = -3$

Recta $x = 0$

La integral que permite calcular el área de la región comprendida entre las curvas indicadas corresponde a

Seleccione una:

$$\int_{-3}^{0} (-x + 3)\,dx$$

$$\int_{0}^{-3} (-x + 3)\,dx$$

$$\int_{-3}^{0} (-x - 3)\,dx$$

$$\int_{-3}^{0} (x - 3)\,dx$$

La respuesta correcta es: $\int_{-3}^{0} (-x + 3)\,dx$

Pregunta **30**

Calcule la siguiente integral para determinar la convergencia o divergencia de la misma. (7 puntos)

$$\int_1^{+\infty} x \cdot e^{-x}\, dx$$

Para responder la sección de **desarrollo** debe seguir las siguientes indicaciones:

a) Contestar en hojas la pregunta en forma clara, ordenada, **a mano**, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. En cada página debe indicar su nombre y apellidos así como el código de estudiante que se le asignó en el proyecto.

b) Incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta.

c) Digitalizar la solución del ejercicio de modo que el procedimiento aparezca en un solo archivo pdf (solamente se aceptará ese formato). Para lograr esto se puede utilizar fotos, escanear o incluso aplicaciones de celular que convierten imágenes a formato pdf. Debe asegurarse de que el archivo sea legible y claro.

d) Nombrar el archivo con la información de número de código de estudiante (otorgado por el proyecto MATEM), nombre y Colegio, como se muestra en el siguiente ejemplo: “12345678.FernandoAguilar.ColegioX”

e) Subir el archivo pdf en el espacio indicado en el examen (debe verificar que está adjuntado el archivo correcto).