

UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA**EMat** Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM-Cálculo
II Examen Parcial 2026- Solucionario

Única parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Utilice la Regla de L'Hôpital para calcular el valor exacto del siguiente límite. (5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [(2x - 1) \cdot \tan(\pi x)]$$

Solución:

Note que el límite presenta la forma indeterminada $0 \cdot -\infty$

Forma 1

Mediante el uso de identidades trigonométricas, se puede reescribir el límite como $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x - 1}{\cot(\pi x)}$, el cual presenta la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene que el límite es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x - 1}{\cot(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2}{-\csc^2(\pi x) \cdot \pi} = \frac{-2}{\pi}$$

Forma 2

Mediante el uso de identidades trigonométricas, se puede reescribir el límite como

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{(2x-1)\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}, \text{ el cual presenta la forma indeterminada } \frac{0}{0}.$$

Aplicando la Regla de L'Hôpital, se tiene que el límite es equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{(2x-1)\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2 \cdot \sin(\pi x) + (2x-1)\cos(\pi x) \cdot \pi}{-\sin(\pi x) \cdot \pi} = \frac{-2}{\pi}$$

2. Considere la función f con criterio $f(x) = [\operatorname{arccot}(x)]^{\sqrt{x}}$. Determine el criterio de la derivada de f . (8 puntos)

Solución:Forma 1

$$y := [\operatorname{arccot}(x)]^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y = \ln ([\operatorname{arccot}(x)]^{\sqrt{x}}) \Rightarrow \ln y = \sqrt{x} \cdot \ln (\operatorname{arccot}(x))$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln (\operatorname{arccot}(x)) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arccot}(x)} \cdot \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y' = [\operatorname{arccot}(x)]^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln (\operatorname{arccot}(x)) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arccot}(x)} \cdot \frac{-1}{1+x^2} \right]$$

Forma 2

$$y := [\operatorname{arccot}(x)]^{\sqrt{x}} = e^{\ln([\operatorname{arccot}(x)]^{\sqrt{x}})} = e^{\sqrt{x} \cdot \ln(\operatorname{arccot}(x))}$$

$$\Rightarrow y' = e^{\sqrt{x} \cdot \ln(\operatorname{arccot}(x))} \cdot [\sqrt{x} \cdot \ln (\operatorname{arccot}(x))]'$$

$$\Rightarrow y' = e^{\sqrt{x} \cdot \ln(\operatorname{arccot}(x))} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln (\operatorname{arccot}(x)) + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\operatorname{arccot}(x)} \cdot \frac{-1}{1+x^2} \right]$$

3. Determine $\frac{dy}{dx}$ si se sabe que $\arcsen(y) + \sen(x^2 + y^2) = e^2x$. (8 puntos)

Solución:

Derivando ambos miembros de la igualdad con respecto a la variable x , se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot y' + \cos(x^2 + y^2) \cdot (2x + 2y \cdot y') &= e^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot y' + 2x \cos(x^2 + y^2) + 2y \cdot y' \cos(x^2 + y^2) &= e^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot y' + 2y \cdot y' \cos(x^2 + y^2) &= e^2 - 2x \cos(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow y' \left[\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 2y \cos(x^2 + y^2) \right] &= e^2 - 2x \cos(x^2 + y^2) \\ \Rightarrow y' = \frac{e^2 - 2x \cos(x^2 + y^2)}{\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 2y \cos(x^2 + y^2)}\end{aligned}$$

4. Considere la función $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, con criterio $g(x) = 2(x - 1)^{\frac{2}{3}} + x$. Determine **todos los números críticos** de g , así como el **valor mínimo absoluto** de g . (6 puntos)

Solución:

$g'(x) = \frac{4}{3}(x - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 1 + 1 = \frac{4}{3\sqrt[3]{x - 1}} + 1 = 0 \Rightarrow 4 = -3\sqrt[3]{x - 1} \Rightarrow 64 = -27(x - 1) \Rightarrow x = 1 - \frac{64}{27} = \frac{-37}{27}$ que pertenece a D_g , con lo cual $\frac{-37}{27}$ es un número crítico. Observe que, $x = 1$ es otro número crítico, pues es un elemento del dominio de g en el que la derivada se indefine.

Además,

x	$g(x)$
-2	$2\sqrt[3]{9} - 2 \approx 2,16$
$\frac{-37}{27}$	$\frac{59}{27} \approx 2,19$
1	1
2	4

Con lo cual, el mínimo absoluto de g es 1.

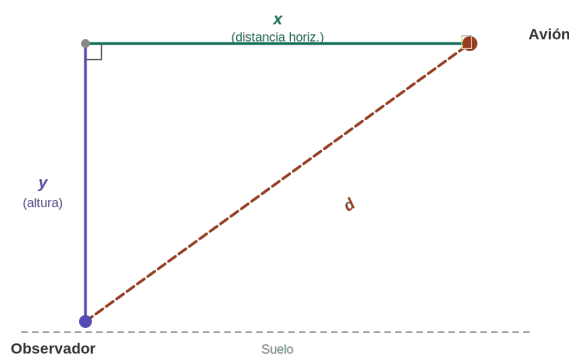
5. Considere el criterio $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ¿Por qué se puede aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[-1, 0]$? Determine un valor $c \in]-1, 0[$ que satisfaga para f la conclusión que dicho teorema establece. (7 puntos)

Solución:

Como el criterio de f es polinomial, entonces f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, en particular es continua en $[-1, 0]$ y derivable en $] - 1, 0[$, con lo cual f satisface la hipótesis de Teorema del Valor Medio en ese intervalo. Para hallar todos los valores de c que satisfacen dicho teorema, se resuelve $f'(c) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - -1} \iff 3c^2 - 2 = \frac{1 - 2}{0 - -1}$
 $\iff 3c^2 - 2 = -1$. Por lo que $c = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, pero como se está trabajando en el intervalo $] - 1, 0[$, entonces el valor de c debe ser $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Un avión vuela horizontalmente a una altura constante de 10 kilómetros sobre el suelo, con una rapidez de 14 kilómetros por minuto. En cierto momento, el avión pasa exactamente por encima de un observador que se encuentra en el suelo. ¿Con qué rapidez está aumentando la distancia entre el observador y el avión 30 segundos después de ese momento? Recuerde que al dar su respuesta debe brindar las unidades correspondientes (6 puntos)

Solución:



Por el Teorema de Pitágoras se tiene que $10^2 + x^2 = d^2$. Derivando ambos miembros de la igualdad con respecto al tiempo, se tiene: $0 + 2xx'_t = 2dd'_t \Rightarrow d'_t = \frac{xx'_t}{d}$.

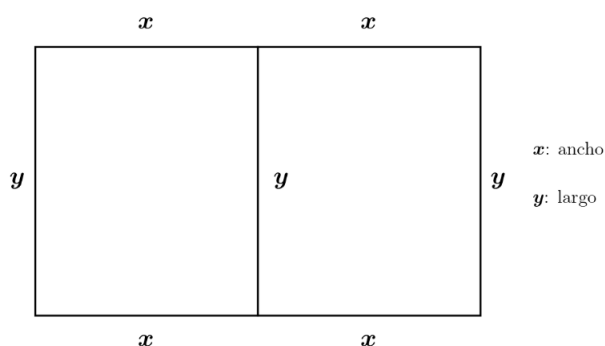
Note que 30 segundos después de que el avión haya pasado por encima del observador, se tiene que $x = 7$ km (distancia recorrida por el avión horizontalmente). Además, por el Teorema de Pitágoras se deduce que en ese mismo instante, $d = \sqrt{10^2 + 7^2}$ km.

Por lo que en ese instante $d'_t = \frac{7 \cdot 14}{\sqrt{149}}$ km/min $\approx 8,03$ km/min.

$\therefore$ 30 segundos después de que el avión haya pasado por encima del observador, la distancia entre estos dos aumenta a razón de $\frac{98}{\sqrt{149}}$ km/min $\approx 8,03$ km/min.

7. Resuelva el siguiente problema utilizando el **criterio de la segunda derivada**.

Un finquero posee 300 metros de malla para cercar dos corrales rectangulares con las mismas dimensiones y contiguos, es decir, que comparten un lado de la cerca, como se muestra en la siguiente figura.



El área A correspondiente a la suma de las áreas de los dos corrales cercados se obtiene mediante la fórmula $A(x) = 200x - \frac{8}{3}x^2$. Determine la medida del ancho x y el largo y que debe tener cada corral para que el área A sea máxima. Recuerde que al dar su respuesta debe indicar las unidades correspondientes. (7 puntos)

Solución:

$$A(x) = 200x - \frac{8}{3}x^2 \Rightarrow A'(x) = 200 - \frac{16}{3}x.$$

$$\text{Note que } A'(x) = 0 \iff 200 - \frac{16}{3}x = 0 \iff 200 = \frac{16}{3}x \iff x = \frac{75}{2}$$

$$\text{Note que } A''(x) = \frac{-16}{3} < 0; \forall x > 0, \text{ en particular para } x = \frac{75}{2} \text{ (número crítico).}$$

Con lo cual, en $x = \frac{75}{2}$ se alcanza el máximo relativo de la función A .

Además, de la relación en torno a los metros de malla, se tiene que $4x + 3y = 300$. De

$$\text{lo cual se desprende que } y = \frac{300 - 4 \cdot \frac{75}{2}}{3} = 50.$$

Por lo tanto, el ancho de cada corral deberá ser de 37,5 metros y el largo de cada corral deberá ser de 50 metros para que el área A sea máxima.

8. Considere la función $f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ y la siguiente información:

$$\blacksquare \quad f(x) = \frac{(1-2x)(1+2x)}{(3x-1)^2} \quad f'(x) = \frac{2(4x-3)}{(3x-1)^3} \quad f''(x) = \frac{2(23-24x)}{(3x-1)^4}$$

■ Tabla de signos:

	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+

Con base en la información suministrada, responda lo que se le solicita a continuación.

A) Brinde un valor c del dominio de f tal que $f'(c) = 0$. (1 punto)

Solución: $\frac{3}{4}$

B) ¿La función f alcanza un máximo relativo? Justifique. (1 punto)

Solución: No, ya que el único valor donde la derivada cambia de positiva a negativa no se encuentra en el dominio de f , es decir, $\frac{1}{3} \notin D_f$.

C) Brinde todos los puntos (x, y) de inflexión de la gráfica de f . (2 puntos)

Solución: El único punto de inflexión de f es $\left(\frac{23}{24}, \frac{-308}{405} \right)$

D) La ecuación de la asíntota horizontal presente en la gráfica de f . (3 puntos)

Solución: Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1-2x)(1+2x)}{(3x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-4x^2}{9x^2-6x+1} = \frac{-4}{9}$, entonces $y = \frac{-4}{9}$ es la ecuación de la única asíntota horizontal.