UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Cálculo
II Examen Parcial 2025

Sábado 21 de junio

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de una única parte de desarrollo (51 puntos).
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen todas las respuestas del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta indeleble azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
6. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Proyecto MATEM-Cálculo
II Examen Parcial 2025- Solucionario

Única parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Utilice la Regla de L'Hôpital para calcular el valor exacto del siguiente límite. (5 puntos)

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{arcsen}(x^2-x-6)}{\arctan(3-x)}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{arcsen}(x^2-x-6)}{\arctan(3-x)} = \lim_{x\to 3} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2-x-6)^2}}\cdot(2x-1)}{\dfrac{1}{1+(3-x)^2}\cdot(-1)} = -5$$

2. Considere la función f con criterio $f(x) = x^{\text{arcsec}(x)}$. Determine el criterio de la derivada de f. (7 puntos)

Solución:

<u>Forma 1</u>

$y := x^{\text{arcsec}(x)} \Rightarrow \ln y = \ln\left(x^{\text{arcsec}(x)}\right) \Rightarrow \ln y = \text{arcsec}(x) \cdot \ln(x)$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln(x) + \text{arcsec}(x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{\text{arcsec}(x)} \left[\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln(x) + \text{arcsec}(x) \cdot \frac{1}{x}\right]$$

<u>Forma 2</u>

$y := x^{\text{arcsec}(x)} = e^{\ln(x^{\text{arcsec}(x)})} = e^{\text{arcsec}(x) \cdot \ln(x)}$

Derivada

$$y' = e^{\text{arcsec}(x)\cdot\ln(x)} \cdot [\text{arcsec}(x) \cdot \ln(x)]' = e^{\text{arcsec}(x)\cdot\ln(x)} \cdot \left[\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot \ln(x) + \text{arcsec}(x) \cdot \frac{1}{x}\right]$$

3. Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ si se sabe que $y^3 - y = 6x^2$. (7 puntos)

Solución:

Derivando ambos miembros de la igualdad con respecto a la variable x, se tiene que $3y^2y' - y' = 12x$.

Así, $y'(3y^2 - 1) = 12x \Rightarrow y' = \dfrac{12x}{3y^2-1}$

$$\Rightarrow y'' = \frac{12(3y^2-1) - 12x \cdot 6yy'}{(3y^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{12(3y^2-1) - 12x \cdot 6y \cdot \dfrac{12x}{3y^2-1}}{(3y^2-1)^2}$$

4. Encuentre el valor máximo y mínimo absoluto de $g : \left[-1, \dfrac{1}{27}\right] \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - \sqrt[3]{x^2}$. (5 puntos)

Solución:

$g'(x) = 2 - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{27} \in \left[-1, \dfrac{1}{27}\right]$. Observe que, $x = 0$ es un número crítico, pues es un elemento del dominio de g en el que la derivada se indefine. Note que, $g(-1) = -3$, $g(0) = 0$, $g\left(\dfrac{1}{27}\right) = \dfrac{-1}{27}$. Con lo cual, el mínimo absoluto es -3 y el máximo absoluto es 0.

5. Considere la función de criterio $h(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ que es continua en $\left[b, \dfrac{5}{2}\right]$ y derivable en $\left]b, \dfrac{5}{2}\right[$ con b una constante real. Si se sabe que h es una función que satisface el Teorema de Rolle en dicho intervalo. Determine el valor de b y luego encuentre todos los números c que satisfacen la conclusión del teorema. (7 puntos)

Solución:

Como satisface el Teorema de Rolle en el intervalo $\left[b, \dfrac{5}{2}\right]$, entonces $h(b) = h\left(\dfrac{5}{2}\right)$. Entonces, $\dfrac{10}{3} = \dfrac{b^3}{3} + \dfrac{b^2}{2} - 2b \Rightarrow 2b^3 + 3b^2 - 12b - 20 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{5}{2} \vee b = -2$. No obstante, el valor b es -2, pues si fuese la otra posibilidad, no tendría sentido el intervalo dado en el enunciado.
Luego, $h'(c) = c^2 + c - 2 = 0 \Rightarrow c = -2 \vee c = 1$. El único valor de c sería $c = 1$, pues es el único que pertenece al intervalo $\left]-2, \dfrac{5}{2}\right[$

6. Se dispone de $1\,200\ cm^2$ de material para construir una caja de base cuadrada que no tenga tapa (prisma recto de base cuadrada que no tiene una de las bases). Determine las dimensiones h (altura del prisma) y x (medida de la arista de la base del prisma) de manera que la caja contenga el mayor volumen posible.
Observación: como parte de su justificación, **debe utilizar el criterio de la segunda derivada** para asegurar que en el número crítico hallado se alcanza el máximo relativo. (7 puntos)

Solución:
Como $A = 1200 = 4xh + x^2 \Rightarrow h = \dfrac{1200 - x^2}{4x}$

Así, $V = x^2h = x^2 \cdot \dfrac{1200 - x^2}{4x} = 300x - \dfrac{x^3}{4} \Rightarrow V' = 300 - \dfrac{3x^2}{4} = 0$
$\Rightarrow 1200 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1200}{3}} = \pm 20$. Como x representa la medida de una arista, esta debe ser positiva, con lo que se descarta el valor negativo.

Note que $V''(x) = \dfrac{-3x}{2} < 0; \forall x > 0$, en particular para $x = 20$ (número crítico). Con lo cual en $x = 20$ se alcanza el máximo relativo.
Por lo tanto, las dimensiones que debe tener la caja para maximizar el volumen son $x = 20\,cm$ y $h = \dfrac{1200 - (20)^2}{4(20)}\,cm = 10\,cm$.

7. El volumen V de un cilindro circular recto está dado por $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura. Si el radio de dicho cilindro aumenta a razón de $6\,cm/min$ y su altura disminuye a razón de $4\,cm/min$, determine la razón de cambio del volumen del cilindro en el instante en el que el radio es de $12\,cm$ y la altura de $36\,cm$.
(6 puntos)

Solución:
$V = \pi r^2 h \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = 2\pi r \cdot \dfrac{dr}{dt} \cdot h + \pi r^2 \cdot \dfrac{dh}{dt} \Rightarrow \left.\dfrac{dV}{dt}\right|_{\substack{r=12\\h=36}} = 2\pi(12)(6)(36) + \pi(12)^2(-4)$

$\therefore$ La razón de cambio del volumen en ese instante es de $4\,608\,\pi\ cm^3/min$.

8. Considere la función $f : \mathbb{R} - \{1, 3\} \to \mathbb{R}$ y la siguiente información:

- $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2}$

- Tabla de signos:

$-\infty$ 1 2 3 $+\infty$

f''	$-$	$+$	$-$	$+$

Determine lo que se le solicita a continuación con respecto a la gráfica de la función f:

A) Las ecuaciones de todas las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Justifique sus respuestas, así sea que las asíntotas existan o no. (4 puntos)

B) Los intervalos de monotonía. (2 puntos)

C) Todos los puntos de inflexión. (1 punto)

Solución:

A) Las ecuaciones de todas las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. Debe justificar sus respuestas, así sea que las asíntotas existan o no.

<u>Asíntotas verticales:</u>

Los únicos valores en donde f no es continua son $x = 1$ y $x = 3$.

Como $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$ produce la forma indefinida $\dfrac{-1}{0}$, entonces $x = 1$ es la ecuación de una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-2}{x^2-4x+3}$ produce la forma indefinida $\dfrac{1}{0}$, entonces $x = 3$ es la ecuación de una asíntota vertical.

<u>Asíntotas horizontales:</u>

Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-2}{x^2-4x+3} = 0$, entonces $y = 0$ es la ecuación de la única asíntota horizontal.

<u>Asíntotas oblicuas:</u> No posee, pues el grado del numerador no es mayor por exactamente una unidad al grado del denominador.

Otra opción: No hay porque existe asíntota horizontal y estas son mutuamente excluyentes.

B) Los intervalos de monotonía.

Estrictamente creciente: en ningún intervalo.
Decreciente: $]-\infty, 1[$, $]1, 3[$, $]3, +\infty[$.

C) Todos los puntos de inflexión.

$(2, f(2)) = (2, 0)$