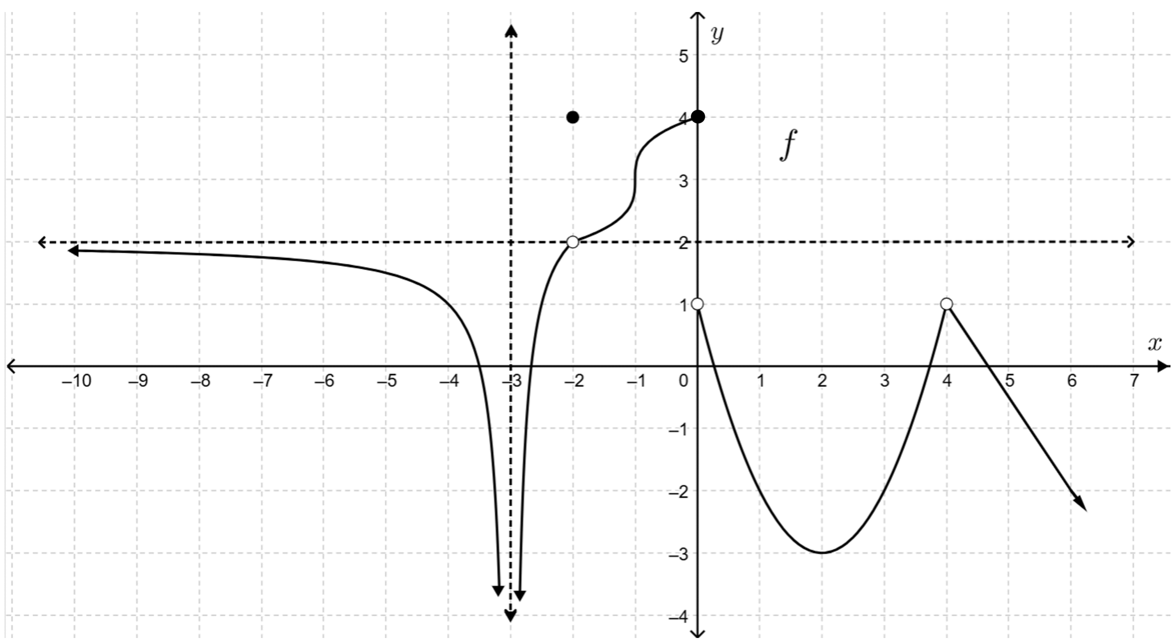
Proyecto MATEM-Cálculo

I Examen Parcial 2025- Solucionario

I parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f. Considere que en el intervalo $]4, +\infty[$ la gráfica de f corresponde a una semirrecta. Determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. En cuanto a los límites, determine el valor numérico al que corresponde cada uno. En caso de que el límite no exista, coloque "$+\infty$" o "$-\infty$" según corresponda. Si el límite no existiera, pero tampoco correspondiera a algún infinito, entonces escriba "no existe". (10 puntos)



1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \underline{2}$
2. $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = \underline{-\infty}$
3. $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \underline{2}$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \underline{1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \underline{-\infty}$

6. La cantidad de discontinuidades evitables que presenta f: $\underline{2}$.
7. Un valor del dominio de f en donde f es continua pero no derivable: $\underline{x=-1}$.
8. El valor numérico de $f'\left(\pi^{10}\right)$: $\underline{\frac{-3}{2}}$.
9. El valor numérico de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$: $\underline{0}$
10. El **signo** de $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{f(x)-f(-4)}{x+4}$: negativo.

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites. No se permite el uso de la regla de L'Hôpital.

   A) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(7x + \sqrt{5-2x+49x^2}\right)$ (7 puntos)

   Dicho límite es de la forma indeterminada $-\infty + \infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\left(7x + \sqrt{5-2x+49x^2}\right) \cdot \frac{7x - \sqrt{5-2x+49x^2}}{7x - \sqrt{5-2x+49x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x-5}{7x - \sqrt{5-2x+49x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{7x - |x|\sqrt{\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} + 49}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{7x + x\sqrt{\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} + 49}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(7 + \sqrt{\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x} + 49}\right)} = \frac{1}{7}$$

B) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{x}$. (6 puntos)

Dicho límite es de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos(x)\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(x)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(x)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{=1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}_{=0}=\frac{1}{2}$$

C) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x\cdot\cos\left(\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^2+3}$ (5 puntos)

Considere $x<0$. Se sabe que

$$-1\leq\cos\left(\frac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)\leq 1$$

$$\Rightarrow -x\geq x\cdot\cos\left(\frac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)\geq x, \qquad \text{se invierte la desigualdad , pues } x<0$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{x^2+3}\geq\frac{x\cdot\cos\left(\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^2+3}\geq\frac{x}{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x^2+3}}_{=0}\geq\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot\cos\left(\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^2+3}\geq\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x^2+3}}_{=0}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-}\frac{x\cdot\cos\left(\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^2+3}=0$$

.

2. Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & si \quad x < 2 \\ \\ mx + 3 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Determine el valor real que debe tomar m de modo que g sea continua en $x = 2$.
(5 puntos)

Para que g sea continua en $x = 2$ es necesario que se cumpla:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = 2m + 3 = \lim_{x \to 2^+} (mx + 3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} \frac{x-2}{2-x} = 2m + 3 = 2m + 3$$

$$\Rightarrow -1 = 2m + 3$$

$$\Rightarrow m = -2$$

3. Calcule la derivada de cada uno de los siguientes criterios de funciones, cada función está definida en su respectivo dominio máximo. No es necesario simplificar.

A) $p(x) = \dfrac{\tan(2-x)}{\sqrt{\ln(x)}}$ (5 puntos)

$$\Rightarrow p'(x) = \frac{[\tan(2-x)]' \cdot \sqrt{\ln(x)} - \tan(2-x) \cdot \left[\sqrt{\ln(x)}\right]'}{\left[\sqrt{\ln(x)}\right]^2}$$

$$\Rightarrow p'(x) = \frac{\sec^2(2-x) \cdot (-1) \cdot \sqrt{\ln(x)} - \tan(2-x) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \cdot \dfrac{1}{x}}{\ln(x)}$$

B) $q(x) = \cos\left[(3x+1)\cdot 2^x\right]$ (5 puntos)

$$\Rightarrow q'(x) = -\operatorname{sen}\left[(3x+1)\cdot 2^x\right]\cdot\left[(3x+1)\cdot 2^x\right]'$$

$$\Rightarrow q'(x) = -\operatorname{sen}\left[(3x+1)\cdot 2^x\right]\cdot\left[(3x+1)'\cdot 2^x + (3x+1)\cdot(2^x)'\right]$$

$$\Rightarrow q'(x) = -\operatorname{sen}\left[(3x+1)\cdot 2^x\right]\cdot\left[(3\cdot 2^x + (3x+1)\cdot 2^x\cdot\ln(2)\right]$$

4. Considere la función $j : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ con criterio $j(x) = \dfrac{3}{x-1}$ y determine lo que se le solicita a continuación.

A) Utilice la definición de derivada para verificar que $j'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$. (5 puntos)

$$j'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{j(x+h)-j(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3}{x+h-1}-\dfrac{3}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x-1)-3(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)} = \lim_{h\to 0}\frac{-3\cancel{h}}{\cancel{h}(x+h-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-3}{(x+h-1)(x-1)} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

B) Determine todos los **puntos** (x, y) en los que la recta tangente a la gráfica de j es perpendicular a la recta de ecuación $y = 3x + 5\pi$. (5 puntos)

Por el apartado anterior, podemos afirmar que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de j en una abscisa genérica $x \neq 1$ es $\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Por otro lado, como la recta tangente debe ser perpendicular a la recta de ecuación $y = 3x + 5\pi$, necesitamos hallar para cuál o cuáles valores de x (si es que existen) se cumple que $\dfrac{-3}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{3}$. Esto ocurre cuando $9 = (x-1)^2 \iff x-1 = 3 \vee x-1 = -3$

Observe que $x = 4$ y $x = -2$ son las dos únicas soluciones de la ecuación. Además, $j(-2) = -1$ y $j(4) = 1$.

$\therefore$ Los únicos puntos en los que la recta tangente a la gráfica de j es perpendicular a la recta de ecuación $y = 3x + 5\pi$ son $(-2, -1)$ y $(4, 1)$