



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática



Cálculo I Examen Parcial 2022

Sábado 23 de abril

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de 3 partes: selección única (3 puntos), respuesta corta (10 puntos) y la tercera de desarrollo (33 puntos).
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen las respuestas de las tres partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible.
6. En los **ítems de selección**, usted deberá indicar en el cuaderno de examen el número de ítem e indicar la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Sólo se calificará la opción de respuesta seleccionada que se encuentre escrita en el cuaderno de examen.
7. Para responder la parte de desarrollo debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
8. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Selección única

Escriba en el cuaderno de examen la letra que antecede a la respuesta que usted considere correcta. (3 puntos, un punto cada respuesta correcta)

1. Si se sabe que $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{4f(x) - 2}{3 - x} \right] = 6$, considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$

II. $f(4) = -1$.

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones son, con certeza, verdaderas?

- A) Ambas
- B) Solo la I
- C) Solo la II
- D) Ninguna

2. Considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2 - x} = 0$

II. $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- A) Ambas
- B) Solo la I
- C) Solo la II
- D) Ninguna

3. Considere la función $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x < 4 \\ \sqrt{x} + 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$. ¿Cuál es el valor de a para que f sea continua en todo su dominio?

A) $\frac{7}{4}$

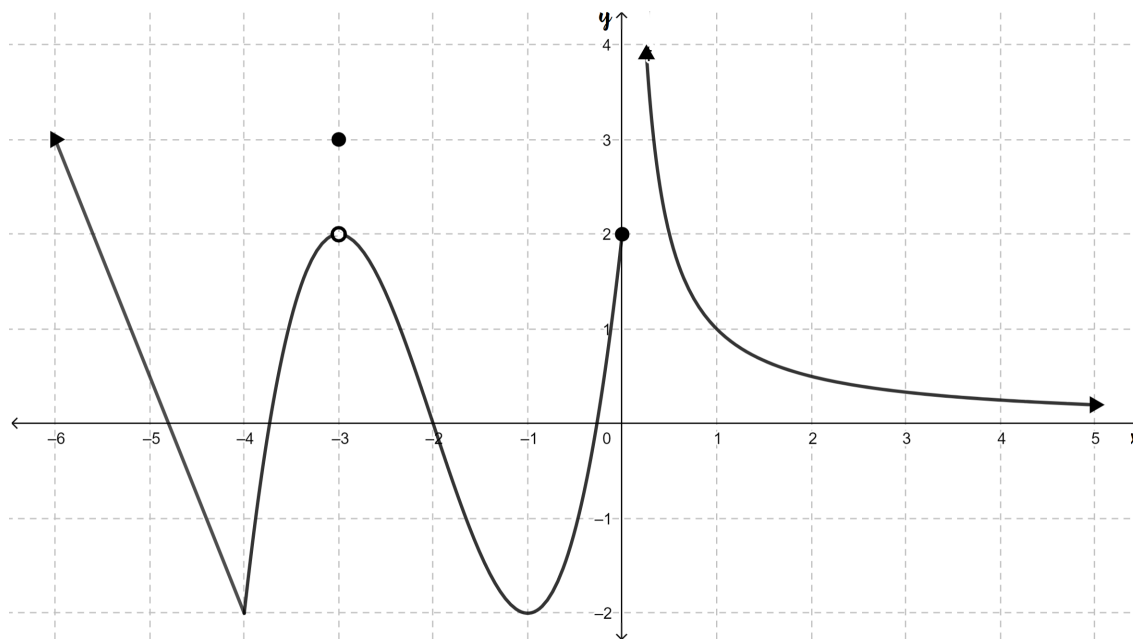
B) 4

C) $\frac{4}{7}$

D) 7

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f , determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. (10 puntos)



1. $f'(-1) =$
2. $f'(-5) =$
3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$
5. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) =$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$
7. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?
8. La ecuación de la asíntota vertical.
9. Un valor de x donde existe una discontinuidad evitable.
10. Un valor del dominio donde la función es continua pero no es derivable.

III parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites:

A) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1-x|}{(1-x)\sqrt{12-|x+6|}}$ (5 puntos)

B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$ (5 puntos)

C) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos(x)}{\pi-3x}$ (7 puntos)

2. Calcule la derivada de cada una las siguientes funciones. No es necesario simplificar.

A) ~~$f(x) = \sqrt{2x^2+1} \ln(4x)$~~ $f(x) = \sqrt{2x^2+1} e^{4x}$ (5 puntos)

B) $g(x) = \frac{2^{3x-2}}{\tan(-x+1)}$ (5 puntos)

3. Determine los valores de a y b de modo que la gráfica de la parábola $h(x) = x^2 + ax$ tenga, en $x = -3$, como recta tangente a la recta con ecuación $y = 2x + b$. (6 puntos)

Fin del examen



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat

Escuela de
Matemática

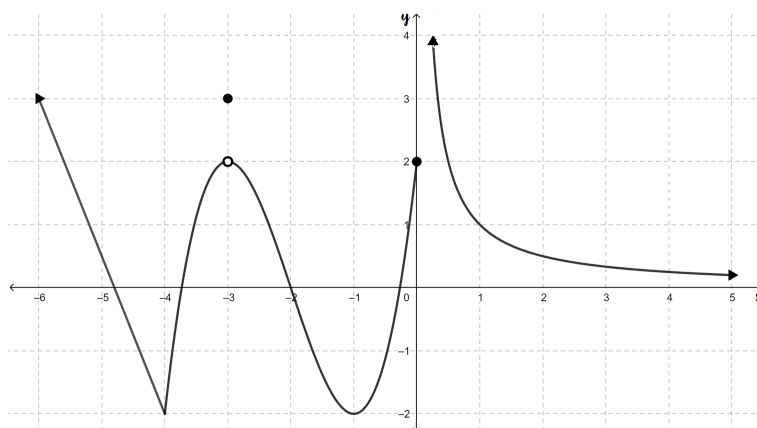
Proyecto MATEM-Cálculo I Examen Parcial 2022- Solucionario

I parte: Selección única

1. D 2. C 3. A

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f , determine lo que se le solicita. (10 puntos)



1. $f'(-1) = \underline{0}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \underline{+\infty}$

2. $f'(-5) = \underline{\frac{-5}{2}}$

5. $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \underline{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \underline{1}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{0}$

7. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? No existe (opcional: porque los límites laterales son distintos)

8. La ecuación de la asíntota vertical. $x = 0$

9. Un valor de x donde existe una discontinuidad evitable. -3

10. Un valor del dominio donde la función es continua pero no es derivable. -4

III parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites:

$$\text{A) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1-x|}{(1-x)\sqrt{12-|x+6|}} \quad (5 \text{ puntos})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(1-x)}{(1-x)\sqrt{12-(x+6)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\cancel{-(1-x)}}{\cancel{(1-x)}\sqrt{12-(x+6)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{\sqrt{12-(x+6)}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}} \quad (5 \text{ puntos})$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{x-|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{x+x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}}{1+\overset{0}{\sqrt{1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x}}}+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{x^2}}}}}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{C) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos(x)}{\pi - 3x} \quad (7 \text{ puntos})$$

$$\text{Sea } u = x - \frac{\pi}{3}$$
$$u \rightarrow 0$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left(\cos(u) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(u) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left(\cos(u) \frac{1}{2} - \sin(u) \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(u) + \sqrt{3} \sin(u)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{3} \cdot \frac{1 - \cos(u)}{u} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sin(u)}{u} \right)$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones. No es necesario simplificar

A) ~~$f(x) = \sqrt{2x^2+1} \ln(4x)$~~ $f(x) = \sqrt{2x^2+1} e^{4x}$ (5 puntos)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}} \cdot 4x \cdot e^{4x} + \sqrt{2x^2+1} \cdot e^{4x} \cdot 4$$

Otra forma:

$$f'(x) = \frac{1}{2} (2x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \cdot 4x \cdot e^{4x} + \sqrt{2x^2+1} \cdot e^{4x} \cdot 4$$

B) $g(x) = \frac{2^{3x-2}}{\tan(-x+1)}$ (5 puntos)

$$g'(x) = \frac{2^{3x-2} \ln(2) \cdot 3 \cdot \tan(-x+1) - 2^{3x-2} \cdot \sec^2(-x+1) \cdot -1}{(\tan(-x+1))^2}$$

3. Determine los valores de a y b de modo que la gráfica de la parábola $h(x) = x^2 + ax$ tenga, en $x = -3$, como recta tangente a la recta con ecuación $y = 2x + b$. (6 puntos)

Sea $h(x) = x^2 + ax$, entonces $h'(x) = 2x + a$.

Se desea colocar la recta tangente en $x = -3$, o visto de otra forma, en el punto $(-3, h(-3))$

Como la recta tangente tiene ecuación $y = 2x + b$, entonces el valor de la pendiente es 2, por tanto:

$$h'(-3) = 2$$

$$2(-3) + a = 2$$

$$a = 8$$

Como $(-3, h(-3))$ es el punto de tangencia, este pertenece a $h(x) = x^2 + 8x$ y a la recta $y = 2x + b$.

$$h(-3) = (-3)^2 + 8(-3) = -15$$

Eso indica que $(-3, -15)$ pertenece a la recta, por lo tanto:

$$2x + b = -15$$

$$2(-3) + b = -15$$

$$b = -9$$

Respuesta: $a = 8$ y $b = -9$