



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

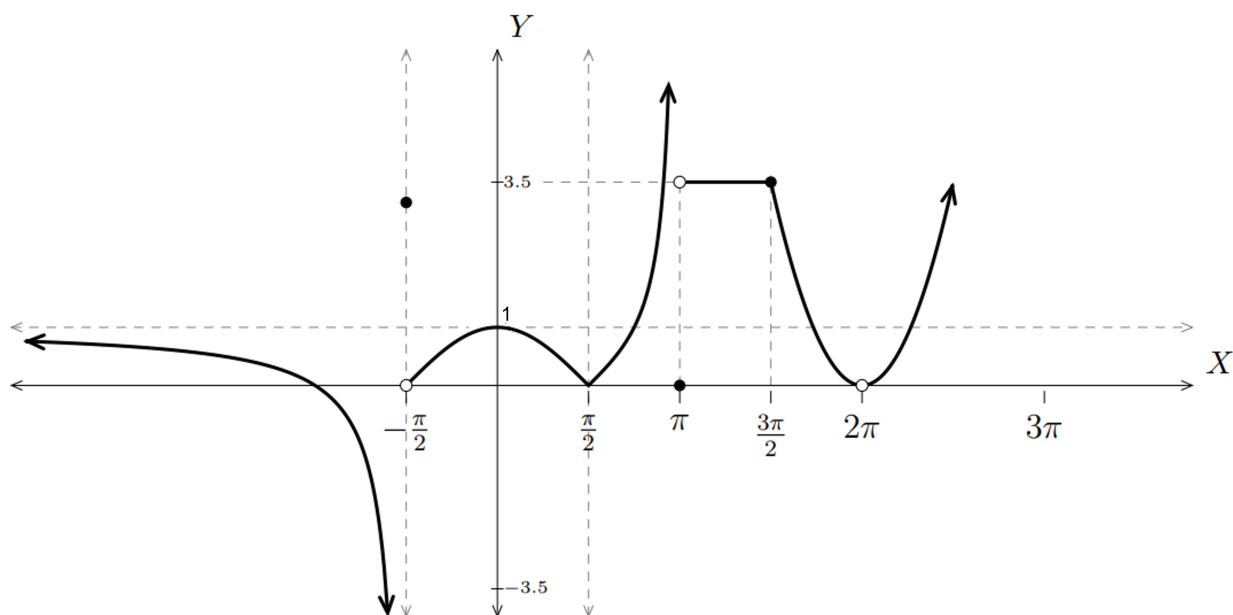
EMat

Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM-Cálculo I Examen Parcial 2026- Solucionario

I parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f . Determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. En cuanto a los límites, determine el valor numérico al que corresponde cada uno. En caso de que el límite no exista, coloque “ $+\infty$ ” o “ $-\infty$ ” según corresponda. Si el límite no existiera, pero tampoco correspondiera a algún infinito, entonces escriba “no existe”. (10 puntos)



1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{1}$
2. $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^-} f(x) = \underline{-\infty}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} f(x) = \underline{0}$
4. $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \underline{3.5}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{+\infty}$
6. La cantidad de discontinuidades inevitables que presenta f es 2.
7. Un valor del dominio de f en donde f es continua pero no derivable es $\frac{\pi}{\underline{2}}$ o $\frac{3\pi}{\underline{2}}$.
8. El valor numérico de $f' \left(\frac{5\pi}{4} \right)$ es 0.
9. El valor numérico de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ es 0.
10. El **signo** de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ es negativo.

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites. No se permite el uso de la regla de L'Hôpital.

$$\text{A)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x} + 4x + 1}{\sqrt[3]{8x^3 - 3x} + \sqrt{16x^2 + 5x}} \quad (7 \text{ puntos})$$

Dicho límite presenta forma indeterminada: $\frac{+\infty - \infty}{-\infty + \infty}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{1}{x}\right)} + 4x + 1}{\sqrt[3]{x^3 \left(8 - \frac{3}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2 \left(16 + \frac{5}{x}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 4x + 1}{x \cdot \sqrt[3]{8 - \frac{3}{x^2}} + |x| \cdot \sqrt{16 + \frac{5}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 4x + 1}{x \cdot \sqrt[3]{8 - \frac{3}{x^2}} - x \cdot \sqrt{16 + \frac{5}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left[-\sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 4 + \frac{1}{x} \right]}{x \left[\sqrt[3]{8 - \frac{3}{x^2}} - \sqrt{16 + \frac{5}{x}} \right]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{1}{x}} + 4 + \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{8 - \frac{3}{x^2}} - \sqrt{16 + \frac{5}{x}}} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} - x \right)}{\operatorname{sen}(x)}. \quad (7 \text{ puntos})$$

Dicho límite es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left[\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{6} \right) \cos(x) - \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \operatorname{sen}(x) \right]}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \left[\frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}(x) \right]}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x) + \sqrt{3} \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{x}{x} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}}_{=1} + \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{C) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x) \cdot \sin\left(\frac{7}{\sqrt[5]{x-3}}\right)}{x+1} \quad (5 \text{ puntos})$$

Considere $x > 3$. Se sabe que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{7}{\sqrt[5]{x-3}}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow -(3-x) \geq (3-x) \cdot \sin\left(\frac{7}{\sqrt[5]{x-3}}\right) \geq 3-x, \quad \text{se invierte la desigualdad, pues } 3-x < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-(3-x)}{x+1} \geq \frac{(3-x) \cdot \sin\left(\frac{7}{\sqrt[5]{x-3}}\right)}{x+1} \geq \frac{3-x}{x+1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(3-x)}{x+1}}_{=0} \geq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x) \cdot \sin\left(\frac{7}{\sqrt[5]{x-3}}\right)}{x+1} \geq \underbrace{\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{x+1}}_{=0}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x) \cdot \sin\left(\frac{7}{\sqrt[5]{x-3}}\right)}{x+1} = 0$$

2. Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + x - 2}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } x = 1 \\ 2bx + 7a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine todos los posibles valores de a y b de modo que g sea continua en $x = 1$.
(7 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x^3 + x^2 + x + 2)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + x^2 + x + 2) = 5$$

$$g(1) = a(1)^2 + b = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2bx + 7a) = 7a + 2b$$

Para que g sea continua en $x = 1$ es necesario que se cumpla:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x), \text{ por lo que}$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 7a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

3. Calcule la derivada de cada uno de los siguientes criterios de funciones, cada función está definida en su respectivo dominio máximo. No es necesario simplificar.

A) $p(x) = \frac{\log(3x+1)}{\sqrt{\cot(x)}}$ (5 puntos)

$$\Rightarrow p'(x) = \frac{[\log(3x+1)]' \cdot \sqrt{\cot(x)} - \log(3x+1) \cdot [\sqrt{\cot(x)}]'}{[\sqrt{\cot(x)}]^2}$$

$$\Rightarrow p'(x) = \frac{\frac{3}{(3x+1)\ln(10)} \cdot \sqrt{\cot(x)} - \log(3x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cot(x)}} \cdot -\csc^2(x)}{\cot(x)}$$

B) $q(x) = 2^{-x} \cdot \sec\left(\frac{1}{x}\right)$ (5 puntos)

$$\Rightarrow q'(x) = [2^{-x}]' \cdot \sec\left(\frac{1}{x}\right) + 2^{-x} \cdot \left[\sec\left(\frac{1}{x}\right)\right]'$$

$$\Rightarrow q'(x) = 2^{-x} \ln(2) \cdot (-1) \cdot \sec\left(\frac{1}{x}\right) + 2^{-x} \cdot \sec\left(\frac{1}{x}\right) \tan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}$$

4. Considere la función $j : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ con criterio $j(x) = \sqrt{16 - x^2}$ y determine lo que se le solicita a continuación.

A) Utilice la **definición de derivada** para verificar que $j'(x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$.
(5 puntos)

$$\begin{aligned} j'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16 - (x+h)^2} - \sqrt{16 - x^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{16 - (x+h)^2} + \sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{16 - (x+h)^2} + \sqrt{16 - x^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 - (x+h)^2 - (16 - x^2)}{h(\sqrt{16 - (x+h)^2} + \sqrt{16 - x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2}{h(\sqrt{16 - (x+h)^2} + \sqrt{16 - x^2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(-2x - h)}{\cancel{h}(\sqrt{16 - (x+h)^2} + \sqrt{16 - x^2})} = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} \end{aligned}$$

- B) Determine la ecuación de la recta normal a la gráfica de j cuando $x = \sqrt{7}$
(4 puntos)

Forma 1

La ecuación de la recta normal es de la forma $y - y_0 = m_n(x - x_0)$.

$$m_t = j'(\sqrt{7}) = \frac{-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow m_n = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$y_0 = j(\sqrt{7}) = 3$$

Por lo que la ecuación de la recta normal a la gráfica de j cuando $x = \sqrt{7}$ es

$$y - 3 = \frac{3}{\sqrt{7}}(x - \sqrt{7})$$
Forma 2

La ecuación de la recta normal es de la forma $y = m_n x + b$.

$$m_t = j'(\sqrt{7}) = \frac{-\sqrt{7}}{3} \Rightarrow m_n = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$y_0 = j(\sqrt{7}) = 3$$

$$b = y_0 - m_n x_0 = 3 - \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{7} = 0$$

Por lo que la ecuación de la recta normal a la gráfica de j cuando $x = \sqrt{7}$ es

$$y = \frac{3}{\sqrt{7}}x$$