



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



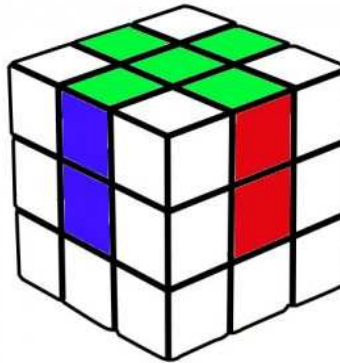
# MATEM 2016

-Undécimo Año-

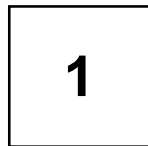
## III EXAMEN PARCIAL

Nombre: \_\_\_\_\_ código: \_\_\_\_\_

Colegio: \_\_\_\_\_



**Fórmula**



Miércoles 28 de setiembre

## **INSTRUCCIONES**

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
3. Este examen consta de dos partes y un total de 55 puntos. La primera de ellas es de selección única (34 puntos) y la segunda es de desarrollo (21 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En las preguntas de selección, usted deberá rellenar con lápiz, en la hoja de respuestas, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En las preguntas de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. Los sólidos se consideran rectos, por ejemplo, cuando se hable de cono se entiende que es un cono circular recto.
11. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

**PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 34 puntos)**

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. La solución de la ecuación  $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} = \sqrt{3^{x+1}}$  corresponde a

(A)  $\frac{-1}{9}$

(B)  $\frac{-1}{7}$

(C)  $\frac{1}{3}$

(D)  $\frac{1}{9}$

2. Analice las siguientes ecuaciones:

I.  $2^x = \log_2 x$

II.  $2^x = \log_{\frac{1}{2}} x$

De ellas, tiene solución única

(A) Solo la I

(B) Solo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

3. La solución de la ecuación  $-1 + \log_3(x+5) = 1$  corresponde a un número

(A) negativo.

(B) entre uno y cinco.

(C) entre cinco y ocho.

(D) mayor que ocho.

Considere lo indicado sobre la escala de decibels y **use esa información para responder la pregunta 4.**

**ESCALA DE DECIBELES**

Tomamos como referencia la intensidad  $I_0 = 10^{-12}$  watts/m<sup>2</sup> a una frecuencia de 1000 Hertz, lo que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de la audición).

El nivel de intensidad  $\beta$  de un sonido, medido en decibels (dB) se define como

$$\beta = 10 \cdot \log \left( \frac{I}{I_0} \right)$$

4. El nivel de intensidad de los decibels de un motor jet durante el despegue si la intensidad ( $I$ ) que se midió fue de 100, corresponde a
- (A) 14
- (B) 140
- (C) 1400
- (D) 0,14
5. ¿Cuál de los siguientes puntos de coordenadas pertenece a la circunferencia trigonométrica?
- (A) (0,0)
- (B)  $\left( \frac{1}{5}, \frac{24}{5} \right)$
- (C)  $\left( \frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5} \right)$
- (D)  $\left( \frac{1}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5} \right)$

6. Si  $\left(k, \frac{1}{4}\right)$  es un punto de la circunferencia trigonométrica ubicado en el segundo cuadrante, entonces  $k$  es igual a
- (A)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$
- (B)  $\frac{\sqrt{17}}{4}$
- (C)  $-\frac{\sqrt{17}}{4}$
- (D)  $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
7. ¿Para cuál de los siguientes valores de  $x$  **no** está definida  $\csc x$ ?
- (A)  $\frac{7\pi}{4}$
- (B)  $\frac{11\pi}{2}$
- (C)  $\frac{2\pi}{3}$
- (D)  $13\pi$
8. De los siguientes números reales, ¿a cuál le corresponde un punto de la circunferencia ubicado en el tercer cuadrante?
- (A) 4
- (B) 5
- (C) -4
- (D) -5
9. El valor de  $\csc\left(\frac{11\pi}{3}\right)$  es igual a
- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (B)  $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$
- (C)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- (D)  $\frac{-\sqrt{3}}{3}$

10. La expresión  $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2}$  es igual a

- (A)  $\frac{1}{2}$
- (B) 2
- (C) 0
- (D)  $\frac{-1}{2}$

11. La expresión  $\tan\left(\frac{83\pi}{3}\right)$  es igual a

- (A)  $\frac{-1}{\sqrt{3}}$
- (B)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (C)  $\sqrt{3}$
- (D)  $-\sqrt{3}$

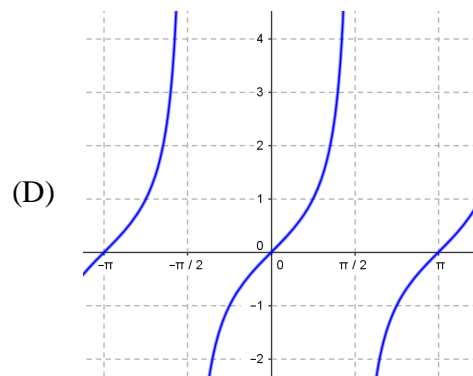
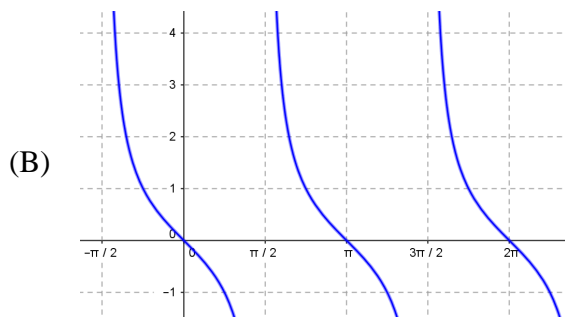
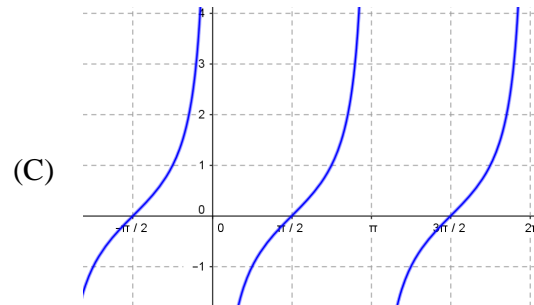
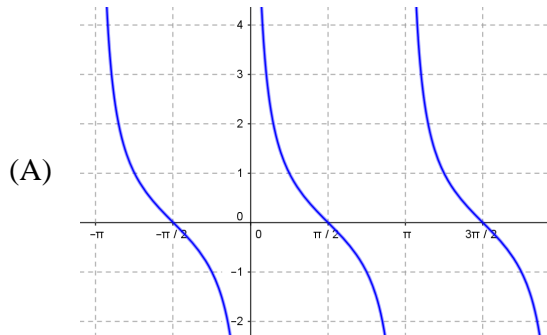
12. ¿En cuál de los siguientes intervalos es creciente la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$ ?

- (A)  $\left] \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right[$
- (B)  $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
- (C)  $]0, \pi[$
- (D)  $] -\pi, 0[$

13. La cantidad de intersecciones con el eje X de la gráfica de la función  $f: [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{sen} x$  es igual a

- (A) 6
- (B) 5
- (C) 4
- (D) 3

14. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función con criterio  $f(x) = \cot(x)$ ?



15. La expresión  $\cos \alpha \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  es equivalente a

- (A) 0
- (B) 1
- (C)  $\cos^2 \alpha$
- (D)  $\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha$

16. La expresión  $\frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{sen}(2x)}$  es equivalente a

- (A)  $\frac{\pi}{2}$
- (B)  $\frac{\sec x}{2}$
- (C)  $\frac{-\csc x}{2}$
- (D)  $\frac{-\sec x}{2}$

17. La expresión  $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$  es equivalente a

- (A)  $\operatorname{csc} x$
- (B)  $1 - \cos x$
- (C)  $\operatorname{csc} x - \cot x$
- (D)  $\operatorname{sen} x + \tan x$

18. La expresión  $\frac{\cos x \cdot \tan^2 x}{\sec x + 1}$  es equivalente a

- (A)  $\cos^2 x$
- (B)  $1 - \cos x$
- (C)  $\cos x - 1$
- (D)  $\operatorname{sen}^2 x$

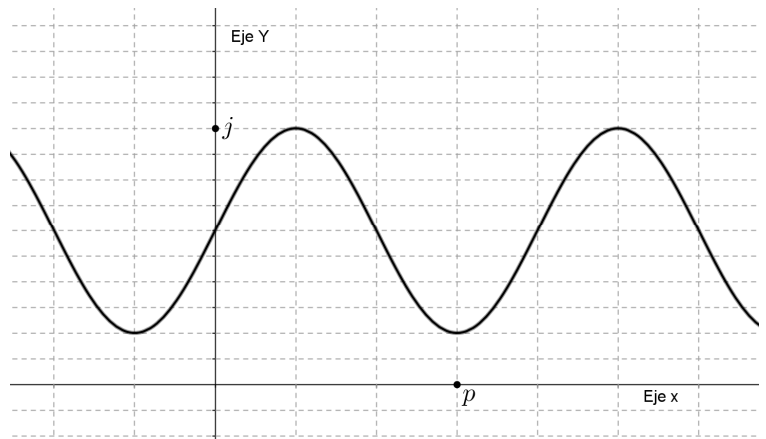
A continuación, se presenta una parte de la gráfica de la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 + 2 \cdot \operatorname{sen} x$ , utilízela para contestar las **preguntas 19 y 20**

19. El valor de  $j$  corresponde a

- (A) 10
- (B) 5
- (C) 3
- (D) 2

20. El valor de  $p$  corresponde a

- (A)  $\frac{3\pi}{2}$
- (B)  $\frac{3\pi}{4}$
- (C)  $3\pi$
- (D)  $2\pi$





21. En  $[0, 2\pi]$ , el conjunto solución  $\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{cos}(x) = 0$  corresponde a

- (A)  $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$
- (B)  $\left\{0, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
- (C)  $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$
- (D)  $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

22. En  $[0, 2\pi[$  el conjunto solución de  $2 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha - 3 = 0$  corresponde a

- (A)  $\emptyset$
- (B)  $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}$
- (C)  $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{-\pi}{2}\right\}$
- (D)  $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

23. El ámbito de la función  $f: ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctan}(x)$  corresponde a

- (A)  $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$
- (B)  $\left] \frac{-\pi}{2}, 0 \right]$
- (C)  $] -\infty, 0]$
- (D)  $\mathbb{R}$

24. El valor de  $3 \cdot \operatorname{arctan}(1) + \operatorname{arctan}(-1)$  es

- (A)  $\frac{\pi}{4}$
- (B)  $\frac{\pi}{2}$
- (C)  $\pi$
- (D)  $0$

25. El valor de  $\arcsen\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$  es

- (A)  $\frac{\pi}{6}$   
 (B)  $-\frac{\pi}{6}$   
 (C)  $\frac{\pi}{3}$   
 (D)  $-\frac{\pi}{3}$

26. El radio de la circunferencia inscrita a un polígono regular de 18 lados mide 25 cm. Cada lado de dicho polígono mide (en cm) aproximadamente

- (A) 4,41  
 (B) 8,82  
 (C) 12,70  
 (D) 25,39

| Grados   | 10     | 20     |
|----------|--------|--------|
| seno     | 0,1736 | 0,3420 |
| coseno   | 0,9848 | 0,9397 |
| tangente | 0,1763 | 0,3640 |

27. La “señal de alto” es un polígono regular. De acuerdo con los datos de la figura, la medida del  $\sphericalangle EFG$  es igual a

- (A)  $145^\circ$   
 (B)  $135^\circ$   
 (C)  $150^\circ$   
 (D)  $125^\circ$



28. Si el perímetro de un hexágono regular es 60 cm entonces su área es

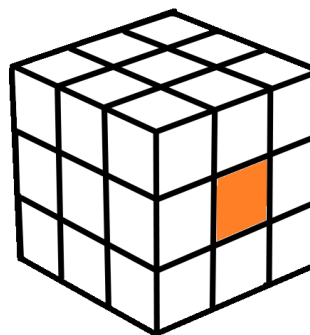
- (A)  $50\sqrt{3} \text{ cm}^2$   
 (B)  $150\sqrt{3} \text{ cm}^2$   
 (C)  $300\sqrt{3} \text{ cm}^2$   
 (D)  $450\sqrt{3} \text{ cm}^2$

29. En un polígono regular, cada ángulo externo mide  $120^\circ$ . Si el perímetro de ese polígono mide 36 cm, entonces, ¿cuál es la medida de la apotema?

- (A)  $2\sqrt{3}$  cm
- (B)  $4\sqrt{3}$  cm
- (C)  $6\sqrt{3}$  cm
- (D)  $12\sqrt{3}$  cm

30. Cada una de las caras del cubo de la figura está formada por nueve cuadrados congruentes de diagonal  $3\sqrt{2}$  cm. ¿Cuánto mide la diagonal de ese cubo?

- (A)  $6\sqrt{3}$  cm
- (B)  $9\sqrt{3}$  cm
- (C)  $9\sqrt{2}$  cm
- (D)  $54\sqrt{3}$  cm



31. En una pirámide de base octogonal regular las aristas laterales miden 10 cm y la altura de cada cara lateral de la pirámide mide 8cm entonces, el perímetro de la base es igual a

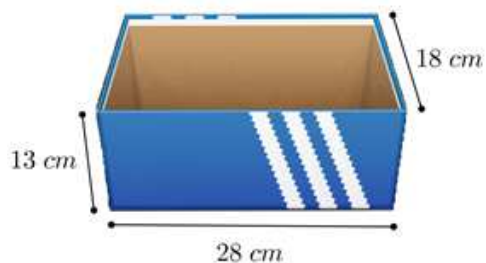
- (A) 128 cm
- (B) 96 cm
- (C) 80 cm
- (D) 48 cm

32. La medida de la altura de un cilindro es 10. Si el área de la base es  $36\pi$   $cm^2$ , entonces el área lateral es igual a

- (A)  $240\pi$   $cm^2$
- (B)  $180\pi$   $cm^2$
- (C)  $120\pi$   $cm^2$
- (D)  $60\pi$   $cm^2$

33. Una caja de tenis (sin tapa) tiene forma de paralelepípedo y sus dimensiones son las que se muestran en la figura. El área total de dicha caja es igual a

- (A)  $1700 \text{ cm}^2$
- (B)  $1788 \text{ cm}^2$
- (C)  $6552 \text{ cm}^2$
- (D)  $2204 \text{ cm}^2$



34. El balón de fútbol utilizado en el mundial 2014, tiene forma esférica. Si el radio de la esfera que forma el balón es aproximadamente  $10,98 \text{ cm}$ , entonces, ¿cuál es, aproximadamente, el área en centímetros cuadrados, de la superficie esférica que forma ese balón?

- (A) 1515,47
- (B) 6061,89
- (C) 14957,12
- (D) 59828,49



*Fin de la primera parte*



Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



**TERCER EXAMEN PARCIAL 2016 - miércoles 28 de setiembre**

Nombre completo: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

COLEGIO: \_\_\_\_\_

**SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 21 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) Determine el conjunto solución de la ecuación

$$2 \cdot \log_3(x+1) - \log_3(x^2 - 1) = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

2. (5 puntos) Utilice la información sobre “inversión de dinero” para resolver el problema que se le presenta.

**Inversión de dinero (interés compuesto anualmente)**

Si una cantidad de dinero  $P$  se invierte a una tasa de interés  $r$  durante un periodo  $t$  de años, entonces el monto  $A$  de la inversión está dado por  $A = P \cdot (1 + r)^t$

Daniel invierte 5000 dólares a una tasa de interés del 2%.

- ¿En cuánto dinero se incrementa lo invertido después de transcurrido un año?
- ¿Cuántos años deben transcurrir para que la cantidad invertida se duplique?

3. (6 puntos) Determine, en  $\mathbb{R}$ , el conjunto solución de la siguiente ecuación

$$\cos x \cdot (\tan x + 1)(2\operatorname{sen} x + \sqrt{3}) = 0$$

4. (5 puntos) La altura de un cono mide  $8\text{ cm}$  y la circunferencia de la base mide es  $12\pi\text{ cm}$ . Determine el área total y el volumen de dicho cono.

*Fin del examen*





Universidad de Costa Rica  
Instituto Tecnológico de Costa Rica



## MATEM 2016 - Undécimo

### SOLUCIONARIO

#### TERCER EXAMEN PARCIAL 2016

#### SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 21 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) Determine el conjunto solución de la ecuación

$$2 \cdot \log_3(x+1) - \log_3(x^2 - 1) = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

Solución:

$$2 \cdot \log_3(x+1) - \log_3(x^2 - 1) = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3(x+1)^2 - \log_3[(x-1)(x+1)] = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3\left[\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}\right] = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \log_3\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \log_3(x+1) = \log_3(x^2 - 5x + 6)$$

$$\Rightarrow x+1 = x^2 - 5x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ o } x=5$$

**Prueba:**

- Para  $x=1$

No es solución dado que hace cero uno de los argumentos de los logaritmos y además es una restricción.

- Para  $x=5$

$$2 \cdot \log_3(5+1) - \log_3(5^2 - 1) = \log_3\left(\frac{5^2 - 5 \cdot 5 + 6}{5-1}\right)$$

$$2 \cdot \log_3(6) - \log_3(24) = \log_3\left(\frac{6}{4}\right)$$

$$\log_3\left(\frac{36}{24}\right) = \log_3\left(\frac{6}{4}\right)$$

$$\log_3\left(\frac{3}{2}\right) = \log_3\left(\frac{3}{2}\right)$$

Sí es solución

$$\text{Entonces } S = \{5\}$$

2. (5 puntos) Utilice la información sobre “inversión de dinero” para resolver el problema que se le presenta.

**Inversión de dinero (interés compuesto anualmente)**

Si una cantidad de dinero  $P$  se invierte a una tasa de interés  $r$  durante un periodo  $t$  de años, entonces el monto  $A$  de la inversión está dado por  $A = P \cdot (1 + r)^t$

Daniel invierte 5000 dólares a una tasa de interés del 2%.

- c. ¿En cuánto dinero se incrementa lo invertido después de transcurrido un año?  
d. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la cantidad invertida se duplique?

Solución:

- a. En un periodo de un año,  $t = 1$ .

$$P = 5000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^1$$

$$\Rightarrow A = 5000 \cdot \frac{51}{50}$$

$$\Rightarrow A = 5100$$

El monto de la inversión se incrementa en 100 dólares.

- b. Para que la inversión se duplique se debe cumplir que  $A = 10000$ .

$$10000 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow 2 = \left(\frac{51}{50}\right)^t$$

$$\Rightarrow \log_{\left(\frac{51}{50}\right)} 2 = t$$

$$\Rightarrow t \approx 35,0027$$

(se aproxima con la calculadora, para efectos del examen se puede dejar en términos de logaritmos)

Deben transcurrir, aproximadamente 35 años.

3. (6 puntos) Determine, en  $\mathbb{R}$ , el conjunto solución de la siguiente ecuación

$$\cos x \cdot (\tan x + 1)(2\operatorname{sen}x + \sqrt{3}) = 0$$

Solución:

Como  $\cos x = 0$  indefinición la tangente, las restricciones son:  $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$$\cos x \cdot (\tan x + 1)(2\operatorname{sen}x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \tan x + 1 = 0, \quad 2\operatorname{sen}x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \tan x = -1, \quad \operatorname{sen}x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{para } k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ x / x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{para } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4. (5 puntos) La altura de un cono mide 8 cm y la circunferencia de la base mide es  $12\pi$  cm. Determine el área total y el volumen de dicho cono.

Solución:

- Circunferencia de la base:  $c = 12\pi = 2\pi r \Rightarrow r = 6$

- Generatriz del cono:  $g^2 = r^2 + h^2$

$$g^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow g = 10$$

- Área total del cono:  $A = A_B + A_L$

$$A = \pi r^2 + \pi r g$$

$$A = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 96\pi$$

• Volumen:  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$$V = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 96\pi$$

Respuestas:

Área total:  $A = 96\pi \text{ cm}^2$

Volumen:  $V = 96\pi \text{ cm}^3$

SELECCIÓN ÚNICA

|   |   |  |    |   |  |    |   |  |    |   |  |    |   |  |
|---|---|--|----|---|--|----|---|--|----|---|--|----|---|--|
| 1 | A |  | 8  | A |  | 15 | C |  | 22 | A |  | 29 | A |  |
| 2 | B |  | 9  | B |  | 16 | D |  | 23 | B |  | 30 | B |  |
| 3 | B |  | 10 | A |  | 17 | C |  | 24 | B |  | 31 | B |  |
| 4 | B |  | 11 | D |  | 18 | B |  | 25 | D |  | 32 | C |  |
| 5 | D |  | 12 | D |  | 19 | B |  | 26 | B |  | 33 | A |  |
| 6 | D |  | 13 | B |  | 20 | A |  | 27 | B |  | 34 | A |  |
| 7 | D |  | 14 | A |  | 21 | D |  | 28 | B |  |    |   |  |