

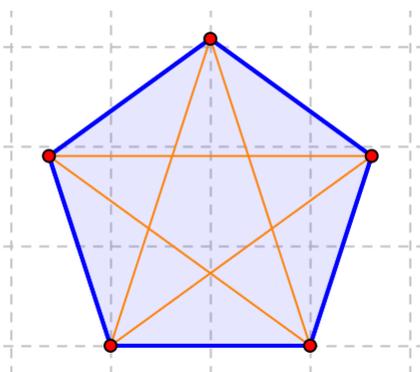


UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática



Precálculo undécimo
III Examen Parcial 2017



Nombre: _____

Colegio: _____

Código: _____

Fórmula: 1

Lunes 25 de setiembre

Instrucciones

1. El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de dos partes. La primera de ellas es de selección única (38 puntos), la segunda de desarrollo (18 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. En los ítems de selección, usted deberá rellenar con lápiz, en la hoja de respuestas, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.
7. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna pregunta está desordenada, ésta no se calificará.
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. Las ecuaciones, a menos que se indique lo contrario, deben resolverse en el conjunto de los números reales.
11. Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.

Selección única

1. El conjunto solución de $3 \cdot 2^x = 36$ es igual a
 - A) $\{2\}$
 - B) $\{\log_2 9\}$
 - C) $\{4 + \log_2 3\}$
 - D) $\{2 + \log_2 3\}$

2. Con respecto a la ecuación $e^x = \log_{\frac{1}{3}} x$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?
 - A) Tiene una solución y es positiva.
 - B) Tiene una solución y es negativa.
 - C) Tienes dos soluciones.
 - D) No tiene soluciones.

3. El conjunto solución de $\log_3(-4x) - \log_3(x - 6) = \log_3(x + 1)$ corresponde a
 - A) \emptyset
 - B) $\{3\}$
 - C) $\{-3\}$
 - D) $\{-2, 3\}$

4. El conjunto solución de $(8^x - \sqrt{2})(\ln x - 1) = 0$ corresponde a

A) $\left\{\frac{1}{6}, e\right\}$

B) $\left\{\frac{3}{2}, e\right\}$

C) $\left\{\frac{1}{6}, 1\right\}$

D) $\left\{\frac{3}{2}, 1\right\}$

5. El número de bacterias de un cultivo, después de t horas, está dado por $N(t) = N_0 \cdot e^{2t}$. Aproximadamente, ¿cuántas horas deben transcurrir para que la población de bacterias se triplique?

Puede usar: $\ln(3) \approx 1,099$ y $\ln(2) \approx 0,693$.

A) 0,35.

B) 0,55.

C) 1,50.

D) 2,20.

6. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La cantidad (en mg) de medicamento en el cuerpo es $A(t) = 20 \cdot (0,8)^t$, donde t es el tiempo (en horas) transcurrido después de ingerir el medicamento. La cantidad de medicamento (en mg) que se eliminó del cuerpo después de 2 horas es igual a

A) 27,2.

B) 12,8.

C) 18,2.

D) 7,2.

7. El equilibrio térmico de cierto objeto con su medio, está dado por la ecuación:

$$t = \frac{-1}{2} \cdot \ln\left(\frac{T}{75}\right)$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y t es el tiempo en horas. Si un objeto se expone a un nuevo ambiente y tarda 0,25 horas en alcanzar el equilibrio térmico con este, entonces, ¿cuál es la temperatura, en grados Celsius, en el momento en que se expuso el objeto a su nuevo medio?

- A) $75 \cdot e^{\frac{-1}{2}}$
- B) $75 \cdot e^{\frac{-1}{4}}$
- C) $75 \cdot e^{-2}$
- D) $75 \cdot e^2$
8. Si (a, b) son las coordenadas de un punto de la circunferencia trigonométrica, analice las siguientes proposiciones:

I. $a + b = 1$

II. Si $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces $b = \frac{1}{2}$.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son, **con certeza**, verdaderas?

- A) Ambas
- B) Ninguna
- C) Solo la I
- D) Solo la II

9. Si $\left(\frac{-1}{3}, p\right)$ son las coordenadas de un punto del tercer cuadrante de la circunferencia trigonométrica, entonces, p es igual a

A) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C) $\frac{-\sqrt{10}}{3}$

D) $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$

10. Sea n un número real tal que $n \in \left]-\frac{5\pi}{2}, -2\pi\right[$. Analice las siguientes afirmaciones:

I. $\cot(n) < 0$

II. $\cos(n) \in]-1, 0[$

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

11. ¿En cuál cuadrante se ubica el punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real $\sqrt{3}$?

A) I

B) II

C) III

D) IV

12. Si $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{a}\right)$ es un punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real β , entonces $\sec \beta$ es igual a

A) $\frac{a^2}{bc}$

B) $\frac{b}{a}$

C) $\frac{a}{c}$

D) $\frac{c}{d}$

13. La expresión $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ es igual a

A) 1

B) 0

C) -1

D) $\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

14. La expresión $\cos\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$ es igual a

A) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

B) $-\frac{1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

15. La expresión $\arccos \left[\sin \left(\frac{19\pi}{6} \right) \right]$ es igual a

A) $\frac{2\pi}{3}$

B) $\frac{5\pi}{6}$

C) $-\frac{\pi}{3}$

D) $\frac{\pi}{6}$

16. La expresión $\arcsen \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$ es igual a

A) $\frac{2\pi}{3}$

B) $\frac{5\pi}{6}$

C) $\frac{-\pi}{3}$

D) $\frac{-\pi}{6}$

17. Un intervalo donde es creciente la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ es

A) $\left[\frac{\pi}{2}, 4 \right]$

B) $] -1, 1[$

C) $] -2, 2[$

D) $[0, \pi]$

18. ¿Cuál de los siguientes números **no pertenece** al dominio máximo de una función f con criterio $f(x) = \cot x$?

A) 2π

B) $\frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{4}$

D) 1

19. Considere la función $f(x) = \sec x$ definida en su dominio máximo. Un intervalo donde f es creciente corresponde a

A) $]0, \pi[$

B) $]\frac{\pi}{2}, \pi[$

C) $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

D) $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

20. Considere la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = \tan x$. Si $f(x) < 0$ para todo $x \in A$, entonces A podría ser

A) $]0, \pi[$

B) $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$

C) $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

D) $\left] \frac{-3\pi}{2}, -\pi \right[$

21. El rango de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -4 \sin(3x - \pi) + 2$ corresponde a

A) \mathbb{R}

B) $[-1, 1]$

C) $[-4, 4]$

D) $[-2, 6]$

22. Considere la función $f(x) = -3 \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 1$ definida en su dominio máximo. El periodo de f es igual a

A) 2

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{\pi}{2}$

D) 2π

23. La expresión $\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} + 1$ es equivalente a

A) $\sec x$

B) $\csc x$

C) $\cos x$

D) $\sen x$

24. La expresión $\frac{2}{1 - \sen x} - \frac{2}{1 + \sen x}$ es equivalente a

A) $\frac{4 \sen x}{\cos^2 x}$

B) $\frac{\cos x}{\sen^2 x}$

C) $\frac{4}{\cos^2 x}$

D) $\tan x \cdot \sec x$

25. La expresión $\sen(\pi + x) \cdot \sen(\pi - x)$ es equivalente a

A) $\sen^2 x$

B) $-\sen^2 x$

C) $\sen(2\pi x)$

D) $\sen(\pi^2 - x^2)$

26. La expresión $\frac{\tan(x + 6\pi)}{\sin(-2x)}$ es equivalente a

A) $\frac{-1}{2} \sec^2 x$

B) $\frac{-1}{2} \cos^2 x$

C) $\frac{1}{2} \cos^2 x$

D) $\frac{1}{2} \sec^2 x$

27. Si $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ y $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces α es igual a

A) $\frac{7\pi}{4}$

B) $\frac{5\pi}{4}$

C) $\frac{3\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{4}$

28. En $\left[\frac{-3\pi}{2}, 0 \right]$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación $2 \cos^2 x - \cos x = 0$?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

29. La suma de los ángulos internos de un polígono convexo es 2160° . ¿Cuál es el total de diagonales de ese polígono?
- A) 54
 - B) 77
 - C) 104
 - D) 90
30. Si la medida del radio de un hexágono regular es 10 cm , entonces, ¿cuál es el perímetro del hexágono?
- A) 30 cm
 - B) 60 cm
 - C) $20\sqrt{3}\text{ cm}$
 - D) $40\sqrt{3}\text{ cm}$
31. La generatriz de un cono mide 10 cm y la altura es 3 veces el radio de la base. El área basal es igual a
- A) $10\pi\text{ cm}^2$
 - B) $100\pi\text{ cm}^2$
 - C) $\sqrt{10}\pi\text{ cm}^2$
 - D) $2\pi\sqrt{10}\text{ cm}^2$

32. Si la medida de la diagonal de un cuadrado es 8, entonces, la longitud de la circunferencia inscrita en este cuadrado es

A) 8π

B) 32π

C) $4\pi\sqrt{2}$

D) $8\pi\sqrt{2}$

33. Un cubo tiene 864 cm^2 de área total. ¿Cuánto es aproximadamente (en cm^3) el volumen de la esfera circunscrita al cubo?

Use: $\sqrt{3} \approx 1,73$ y $\pi \approx 3,14$.

A) 1353,27

B) 4682,31

C) 5413,08

D) 37458,50

34. Una pirámide recta de base cuadrada tiene 360 cm^3 de volumen. Si cada lado de la base mide 10 cm , entonces el área lateral es aproximadamente

A) $59,50 \text{ cm}^2$

B) $89,25 \text{ cm}^2$

C) $238,03 \text{ cm}^2$

D) $357,50 \text{ cm}^2$

35. En un cilindro, el radio y la altura miden lo mismo. Si el área total es $36\pi \text{ cm}^2$, ¿cuánto mide el diámetro de la base?

- A) 3 cm
- B) 6 cm
- C) 9 cm
- D) 12 cm

36. Considere una pirámide recta, de base hexagonal regular, donde se cumple que:

- La altura mide 12 cm .
- La altura de la cara mide $\sqrt{219} \text{ cm}$.

De acuerdo con lo anterior, el perímetro de la base es igual a

- A) 30 cm
- B) 50 cm
- C) 60 cm
- D) 120 cm

37. Una esfera de $36\pi \text{ cm}^2$ de área está dentro de otra. Si el radio de una es el doble de la otra, entonces, ¿Cuánto es el volumen del espacio comprendido entre ambas esferas?

- A) 72π
- B) 252π
- C) 144π
- D) 288π

38. La base de un prisma recto es un triángulo equilátero de área $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Si la altura del prisma mide 10 cm , ¿cuánto es el área lateral de ese prisma?

A) 40 cm^2

B) 60 cm^2

C) 120 cm^2

D) 240 cm^2

Fin de la primera parte



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM
Precálculo undécimo
III Examen Parcial 2017

Nombre: _____

Colegio: _____

Código: _____

Pregunta	Puntos
D1	
D2	
D3	
D4	

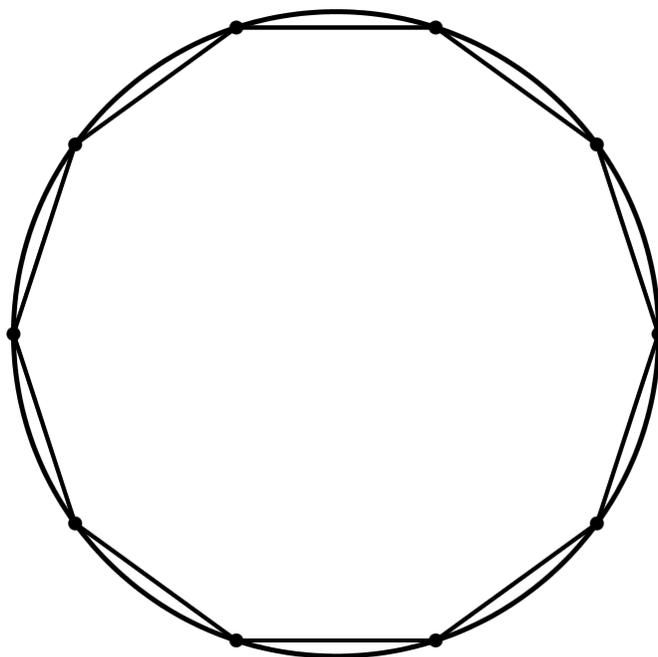
Fórmula: 1

II parte: Desarrollo

1. En la siguiente figura se presenta un polígono regular inscrito en una circunferencia. Si el perímetro del polígono es igual a 80 cm . Determine: (6 puntos)

Puede usar que: $\text{sen}(72^\circ) \approx 0,9511$ y $\text{sen}(18^\circ) \approx 0,3090$.

- a) La suma de los ángulos internos del polígono.
- b) La longitud de la circunferencia (aproximadamente).
- c) El área total del polígono (aproximadamente).



2. Determine el conjunto solución de la ecuación:

(5 puntos)

$$\left(\frac{\sqrt{27}}{3^x}\right)^2 \cdot 27^{-2x+1} = 81^{-x}$$

3. Determine, en \mathbb{R} , el conjunto solución de $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$. (4 puntos)

4. Determine, en $[0, 2\pi]$, el conjunto solución de $\cos x \cdot (\tan x + 1) = 0$. (3 puntos)



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM- Precálculo Undécimo III Examen Parcial 2017- Solucionario

I parte: Selección única

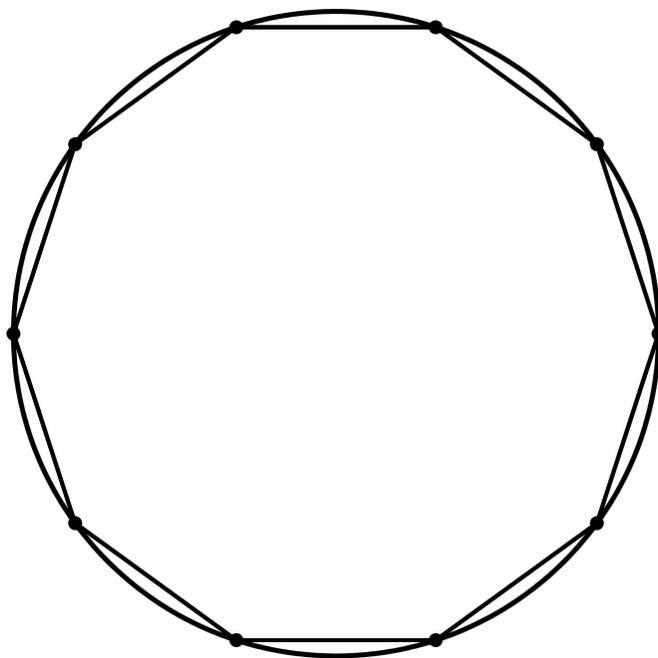
- | | |
|-------|-------|
| 1. D | 20. D |
| 2. A | 21. D |
| 3. A | 22. A |
| 4. A | 23. A |
| 5. B | 24. A |
| 6. D | 25. B |
| 7. A | 26. A |
| 8. B | 27. C |
| 9. D | 28. C |
| 10. C | 29. B |
| 11. B | 30. B |
| 12. B | 31. A |
| 13. C | 32. C |
| 14. D | 33. B |
| 15. A | 34. C |
| 16. C | 35. B |
| 17. B | 36. C |
| 18. A | 37. B |
| 19. B | 38. C |

II parte: Desarrollo

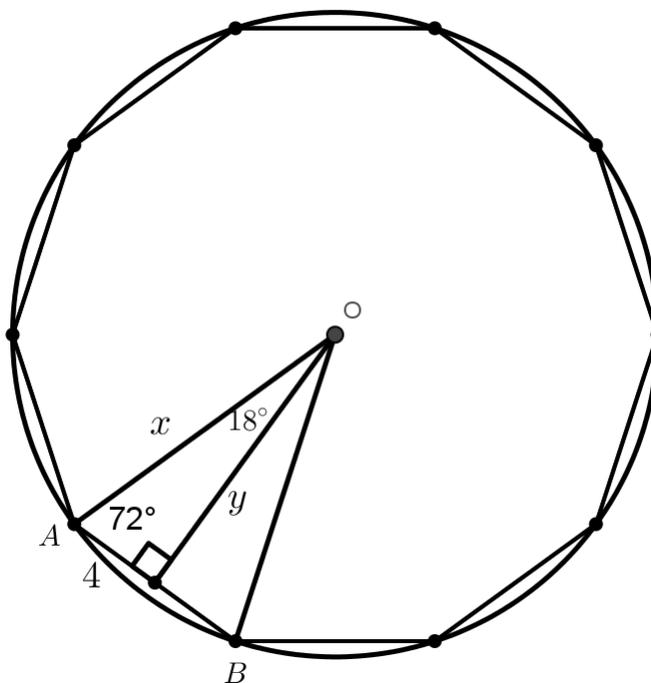
1. En la siguiente figura se presenta un polígono regular inscrito en una circunferencia. Si el perímetro del polígono es igual a 80 cm . Determine: (6 puntos)

Puede usar que: $\text{sen}(72^\circ) \approx 0,9511$ y $\text{sen}(18^\circ) \approx 0,3090$.

- a) La suma de los ángulos internos del polígono. _____
- b) La longitud de la circunferencia (aproximadamente). _____
- c) El área total del polígono (aproximadamente). _____



Solución:



- Como el polígono tiene 10 lados. La suma de los ángulos internos es igual a

$$S = 180(10 - 2) = 1440^\circ$$

- Cada ángulo central mide $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$
- Como el perímetro es 80 *cm*, cada lado del polígono mide 8 *cm*.
- Aplicando razones trigonométricas se obtiene:

$$\text{a. } \operatorname{sen}(18^\circ) = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = \frac{4}{\operatorname{sen}(18^\circ)} \approx 12,94$$

$$\text{b. } \operatorname{sen}(72^\circ) = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = \operatorname{sen}(72^\circ) \cdot 12,94 \approx 12,31$$

- La longitud de la circunferencia es $C = 2\pi r \approx 81,26$ *cm*.
- El área del polígono = $a(\Delta AOB) \cdot 10 \approx \frac{8 \cdot 12,31}{2} \cdot 10 \approx 492,4$ *cm*².

2. Determine el conjunto solución de la ecuación:

(5 puntos)

$$\left(\frac{\sqrt{27}}{3^x}\right)^2 \cdot 27^{-2x+1} = 81^{-x}$$

Solución:

$$\left(\frac{\sqrt{27}}{3^x}\right)^2 \cdot 27^{-2x+1} = 81^{-x} \Leftrightarrow \frac{27}{3^{2x}} \cdot 3^{-6x+3} = 3^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3-2x} \cdot 3^{-6x+3} = 3^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{-8x+6} = 3^{-4x}$$

$$\Leftrightarrow -8x + 6 = -4x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3. Determine, en \mathbb{R} , el conjunto solución de $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$. (4 puntos)

Solución:

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2 \operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \text{ o } \operatorname{sen} x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \left\{ x/x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Determine, en $[0, 2\pi]$, el conjunto solución de $\cos x \cdot (\tan x + 1) = 0$. (3 puntos)

Solución:

$$\cos x \cdot (\tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ o } \tan x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3\pi}{2} \text{ o } x = \frac{3\pi}{4} \text{ o } x = \frac{7\pi}{4}$$

Como la tangente se indefine en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, el conjunto solución es $S = \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$.