Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

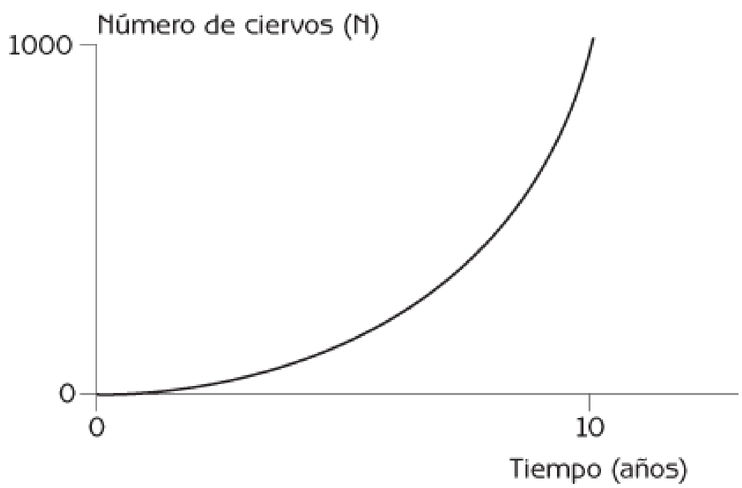
MATEM - Precálculo

Undécimo Año

<u>II EXAMEN PARCIAL</u>

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____



Fórmula

1

Miércoles 30 de julio de 2014

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (20 puntos), la segunda es de respuesta corta (15 puntos) y la tercera de desarrollo (15 puntos).

4. La parte de selección y la de respuesta corta deben ser contestadas en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 20 puntos)**

1. Una recta perpendicular a la recta que contiene a los puntos de coordenadas $(2,-3)$ y $(3,-1)$ es

A) vertical.

B) creciente.

C) horizontal.

D) decreciente.

2. La recta l_1 interseca al eje X en el mismo punto que la recta $2x+3y=6$ y al eje Y en el mismo punto que la recta de ecuación $5x-4y=20$, entonces la pendiente de l_1 es

A) $-\frac{1}{2}$

B) $\frac{5}{3}$

C) $\frac{3}{5}$

D) 2

3. Si la recta de ecuación $kx+2y=3x-5$ es decreciente, entonces el valor de k puede ser cualquier número que cumpla la siguiente condición

A) $k<0$

B) $k<3$

C) $k>3$

D) $k>0$

4. Si $(0,-p)$, (p,p) y $(1,5)$ son las coordenadas de tres puntos colineales, entonces el valor de p es

A) -3

B) $-\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) 3

5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una parábola cóncava hacia abajo que contiene al origen del sistema de coordenadas?

A) $y=-1-x^2$

B) $y=-x+x^2$

C) $y=11x-x^2$

D) $y=-11-x-x^2$

6. El ámbito de la función $f:]-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=-\frac{3}{4}(x-2)+1$ corresponde a

A) $[1,4[$

B) $]1,4]$

C) $\left]\frac{2}{3},6\right]$

D) $\left[\frac{2}{3},6\right[$

7. Considere una función con criterio $f(x)=\frac{2}{3}-\frac{x}{2}$. Si se sabe que el ámbito es el conjunto $\left]-\infty,0\right]$ entonces el dominio de f es

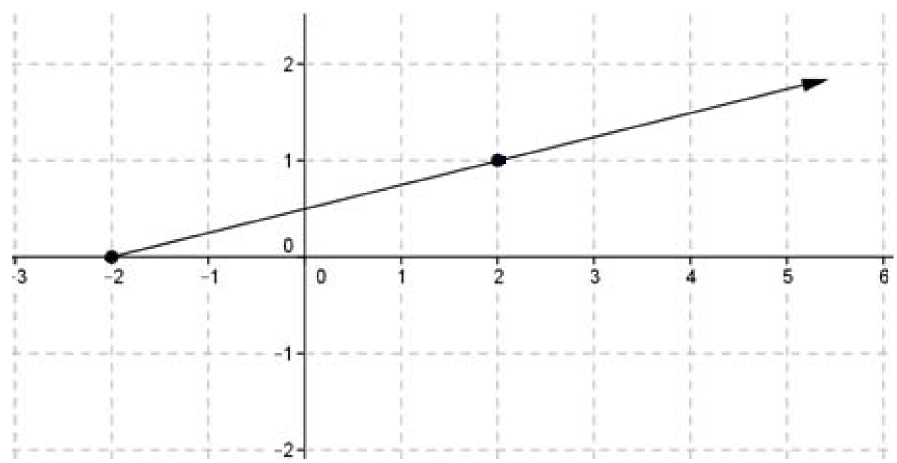
A) $\left[\frac{2}{3},+\infty\right[$

B) $\left[\frac{4}{3},+\infty\right[$

C) $\left]-\infty,\frac{4}{3}\right]$

D) $\left]-\infty,\frac{2}{3}\right]$

8. Considere la función $g:\left[-2,+\infty\right[\to\mathbb{R}$ de la gráfica adjunta.



Se puede asegurar con certeza que $g(12)$ es igual a

A) 3,25

B) 3,5

C) 3,75

D) 4

9. Si se ha determinado que la relación entre la cantidad C de tilapias que hay en un estanque después de d días es lineal y se sabe que al iniciar con una población de 100 tilapias, a los 20 días se tienen 400 tilapias, ¿cuántos días más deben transcurrir para que se tengan 700 tilapias?

A) 10

B) 20

C) 30

D) 40

10. Si la parábola de ecuación $y = 2x^2 - 3x + 5 - kx + k$ es simétrica respecto al eje Y, entonces el valor de k debe ser

A) 5

B) 3

C) -3

D) -5

11. Considere una función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = ax^2 + ax$ con $a \neq 0$. Analice las siguientes proposiciones:

I. Si $h(2) = -6$ entonces, la gráfica de h es cóncava hacia abajo.

II. $h(0) = h(-1)$

De ellas, son verdaderas

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solamente I

D) Solamente II

12. Considere la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 8$ y analice las siguientes proposiciones:

I. Si $A = \left]-\infty, 0\right]$ entonces, f es inyectiva.

II. Si $A = \left[0, +\infty\right[$ entonces, la gráfica de f interseca al eje X una sola vez.

De ellas, son verdaderas

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solamente I

D) Solamente II

13. Considere la función $f : \left]0,1\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} - 1$ y analice las siguientes proposiciones:

I. El ámbito de f es $\left]0,1\right]$

II. f es estrictamente creciente

III. La gráfica de f interseca una única vez al eje X.

De ellas son verdaderas

A) II y III únicamente

B) I y III únicamente

C) I y II únicamente

D) II únicamente

14. Si para la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x-k$ se cumple que 2 es la imagen de 1, entonces la gráfica de *f* es asintótica a la recta de ecuación

A) $y=-\frac{5}{4}$

B) $x=-\frac{5}{4}$

C) $y=\frac{5}{4}$

D) $x=\frac{5}{4}$

15. Una función decreciente y cuya gráfica **no** interseca al eje Y corresponde a

A) $f(x)=2+ln(x)$, $f:]-2,+\infty[\to\mathbb{R}$

B) $f(x)=ln(x-2)$, $f:]2,+\infty[\to\mathbb{R}$

C) $f(x)=-ln(x+2)$, $f:]-2,+\infty[\to\mathbb{R}$

D) $f(x)=2-ln(x)$, $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

16. Si $a>1$, la cantidad de soluciones reales de la ecuación $a^{5x^2-2}=\sqrt{a}$ es

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

17. El conjunto solución de $0 < ln\,x < 1$ es

A) $\left]1, e\right[$

B) $\left]0, e\right[$

C) $\left]0, 1\right[$

D) $\left]-\infty, e\right[$

18. El conjunto solución de $5^x - 3 < 2$ es

A) $\left]0, 1\right[$

B) $\left]1, 5\right[$

C) $\left]-\infty, 5\right[$

D) $\left]-\infty, 1\right[$

19. Se tiene un cultivo de bacterias en el cual se sabe que la cantidad se duplica cada hora. Si se inicia con 50 bacterias, considere las siguientes proposiciones:

I. Después de 2 horas se tienen 150 bacterias.

II. Después de *t* horas se tienen $50 \cdot 2^t$ bacterias.

De ellas, son verdaderas

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solamente I

D) Solamente II

20. El grado de acidez de una solución se define como pH = -log H, donde H es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro. Se dice que una solución es ácida cuando se cumple que $pH < 7$, lo cual sucede si y sólo si

A) $H > 10^{7}\ M$

B) $H > 10^{-7}\ M$

C) $H < 10^{-7}\ M$

D) $H < 10^{7}\ M$

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

MATEM - Precálculo

Undécimo Año

II EXAMEN PARCIAL

Nombre: ________________________________ código: _______

Colegio: ____

Parte	Puntos
Respuesta Corta	
Desarrollo 1	
Desarrollo 2	
Desarrollo 3	

Miércoles 30 de julio de 2014

SEGUNDA PARTE. RESPUESTA CORTA **(Valor 15 puntos)**

Instrucciones: resuelva cada uno de los ejercicios planteados y escriba la respuesta en el espacio que se le brinda. Vale un punto cada respuesta correcta.

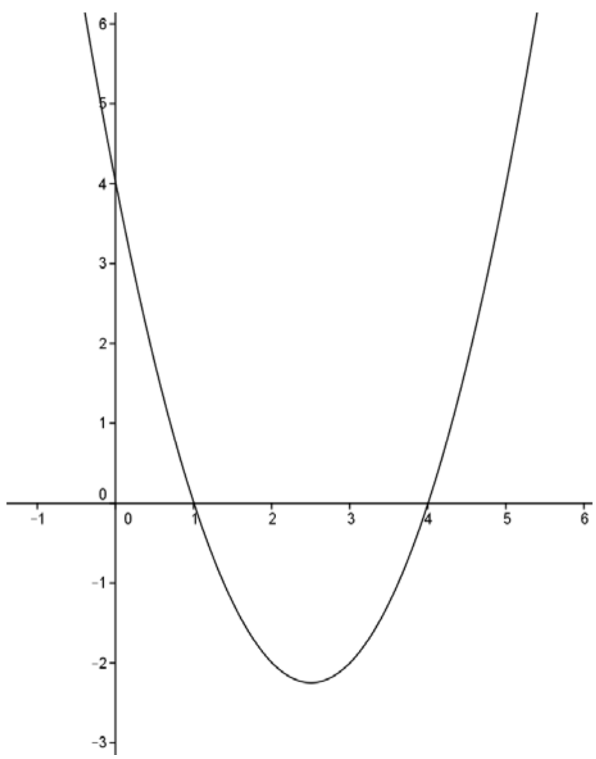
1. Considere los puntos de coordenadas $A\left(-\frac{1}{2},\ 3\right)$ y $B\left(\frac{3}{2},-1\right)$. Indique:

   a. Las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$ ______________

   b. La distancia AB: ______________

   c. La pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$: ______________

2. De acuerdo con la siguiente gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ indique:



a. La **ecuación** del eje de simetría:

____

b. La imagen de 5: ______________

3. Sobre la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=3-2x^2+5x$ indique:

a. Coordenadas del vértice: _______________

b. Cantidad de intersecciones con el eje X: _______________

c. Ámbito: _______________

4. Considere la función $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $r(x)=9-\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Indique el conjunto solución de

a. $r(x)=9$ _______________

b. $r(x)<6$ _______________

5. Sobre la función $h:D_h\to\mathbb{R}$ definida en su dominio máximo por $h(x)=2-log_2(x+8)$ indique:

a. Dominio máximo: _______________

b. Punto de intersección con el eje Y: _______________

c. Punto de intersección con el eje X: _______________

d. Ecuación de la asíntota: _______________

e. $f^{-1}(x)=$ _______________

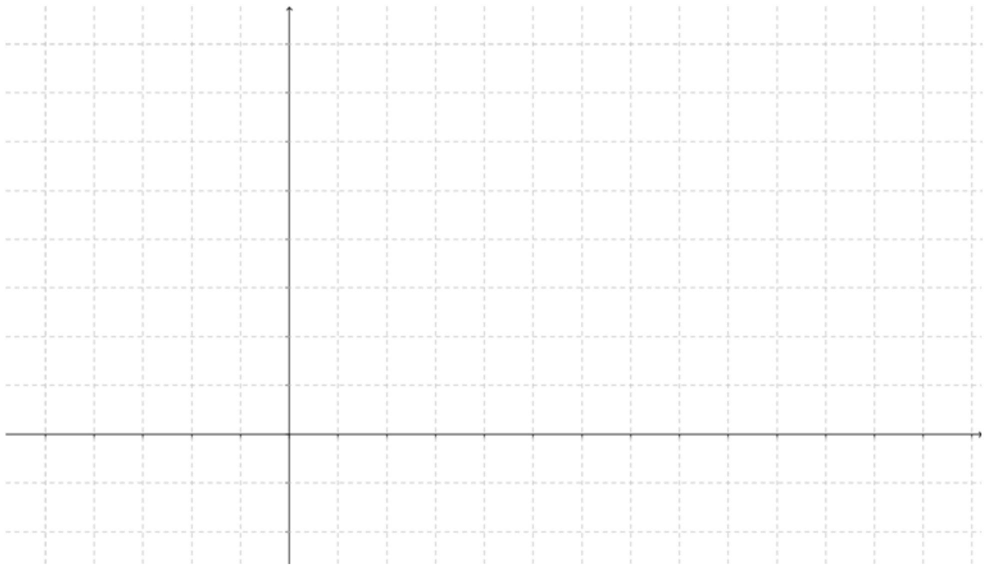
TERCERA PARTE. DESARROLLO **(Valor 15 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (5 puntos) Considere los puntos $A(-2,1)$, $B(3,3)$, $C(2,0)$. Determine algebraicamente las coordenadas del punto $D=(p,q)$ tal que $\square ABCD$ sea un paralelogramo. ¿Es ese cuadrilátero un rombo? Justifique.

2. (5 puntos) Determine el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación $log_2\left(x-2\right)+log_2\left(x-3\right)=1$.

3. (5 puntos) Una fábrica determina que su ganancia diaria P, en dólares, está dada por la función $P(x) = 80x - x^2$, donde $x \in [0,80]$ representa la cantidad de artículos que produce y vende diariamente. Haga un bosquejo de la gráfica de P y determine la ganancia diaria máxima posible para esa fábrica y la cantidad de artículos que debe producir y vender para obtenerla.



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

MATEM - Precálculo

Undécimo Año

II EXAMEN PARCIAL - Solucionario-

Miércoles 30 de julio de 2014

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA

1	D	**6**	A	**11**	A	**16**	C
2	B	**7**	B	**12**	A	**17**	A
3	C	**8**	B	**13**	C	**18**	D
4	A	**9**	D	**14**	C	**19**	D
5	C	**10**	C	**15**	D	**20**	B

SEGUNDA PARTE. RESPUESTA CORTA **(Valor 15 puntos)**

Instrucciones: resuelva cada uno de los ejercicios planteados y escriba la respuesta en el espacio que se le brinda. Vale un punto cada respuesta correcta.

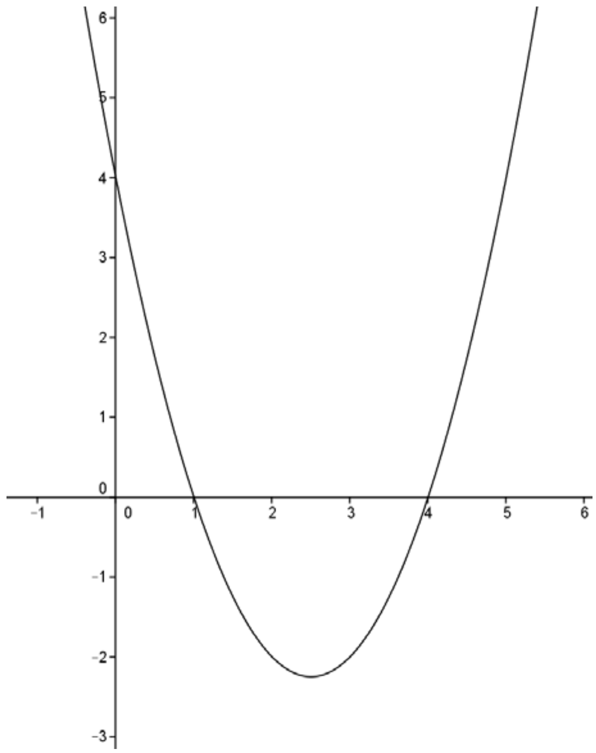
1. Considere los puntos de coordenadas $A\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ y $B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$. Indique:

   a. Las coordenadas del punto medio de $\overline{AB}$ ____$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$______

   b. La distancia AB: ___$2\sqrt{5}$_______

   c. La pendiente de $\overleftrightarrow{AB}$: ____-2______

2. De acuerdo con la siguiente gráfica de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ indique:



a. La **ecuación** del eje de simetría:

____ $x=\frac{5}{2}$ ____________

b. La imagen de 5: ____4______

3. Sobre la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=3-2x^2+5x$ indique:

a. Coordenadas del vértice: ______ $\left(\frac{5}{4},\frac{49}{8}\right)$ _

b. Cantidad de intersecciones con el eje X: ____2________

c. Ámbito: _____ $\left]-\infty,\frac{49}{8}\right]$ _

4. Considere la función $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $r(x)=9-\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Indique el conjunto solución de

a. $r(x)=9$ _____ $\varnothing$ _________

b. $r(x)<6$ ____ $]-\infty,-1[$ ________

5. Sobre la función $h: D_h \to \mathbb{R}$ definida en su dominio máximo por $h(x) = 2 - log_2(x+8)$ indique:

a. Dominio máximo: $D_h =$ ___ $]-8,+\infty[$ ___

b. Punto de intersección con el eje Y: ___ $(0,-1)$ _________

c. Punto de intersección con el eje X: ____ $(-4,0)$ ________

d. Ecuación de la asíntota: _____ $x=-8$ _________

e. $f^{-1}(x) =$ ______ $2^{2-x}-8$ ________

<u>TERCERA PARTE. DESARROLLO</u> **(Valor 15 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

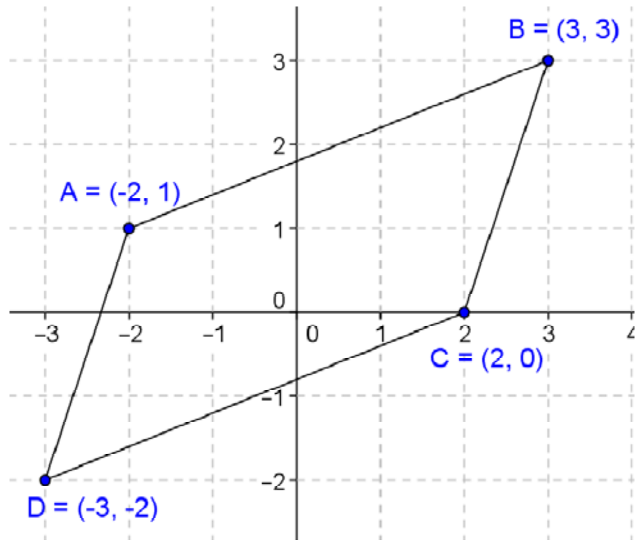
1. (5 puntos) Considere los puntos $A(-2,1)$, $B(3,3)$, $C(2,0)$. Determine algebraicamente las coordenadas del punto $D=(p,q)$ tal que $\square ABCD$ sea un paralelogramo. ¿Es ese cuadrilátero un rombo? Justifique.

Solución

Como los paralelogramos tienen los dos pares de lados opuestos paralelos, entonces las pendientes de los pares de lados opuestos deben ser iguales.

<table>
<tr><th>Segmento</th><th>Pendiente</th><th>Medida</th><th></th></tr>
<tr><td>$\overline{AB}$</td><td>$\frac{2}{5}$</td><td>$\sqrt{29}$</td><td rowspan="2">Como $AB \neq BC$ entonces el cuadrilátero no puede ser un rombo.</td></tr>
<tr><td>$\overline{CB}$</td><td>3</td><td>$\sqrt{10}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{CD}$</td><td>$\frac{q-0}{p-2}$</td><td>$\sqrt{29}$</td><td rowspan="2">$\begin{cases} \frac{q}{p-2} = \frac{2}{5} \\ \frac{q-1}{p+2} = 3 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{AD}$</td><td>$\frac{q-1}{p+2}$</td><td>$\sqrt{10}$</td></tr>
</table>

$$\begin{cases} 5q = 2p - 4 \\ q - 1 = 3p + 6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} q = \dfrac{2p-4}{5} \\ q = 3p + 7 \end{cases}$$

$$\frac{2p-4}{5} = 3p + 7$$
$$2p - 4 = 15p + 35$$
$$-39 = 13p$$
$$p = -3$$
$$q = -2$$

Por lo tanto $D = (-3, -2)$

2. (5 puntos) Determine el conjunto de todos los números reales que son solución de la ecuación $log_2(x-2) + log_2(x-3) = 1$.

Solución

$$log_2\left[(x-2)(x-3)\right] = log_2 2$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 2 \quad \wedge \quad x > 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \wedge \quad x > 3$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-4) = 0 \quad \wedge \quad x > 3$$
$$\Leftrightarrow (x = 1 \quad \vee \quad x = 4) \quad \wedge \quad x > 3$$
$$\Leftrightarrow x = 4$$

Prueba $x = 4$

$$log_2(4-2) + log_2(4-3) = 1$$
$$log_2(2) + log_2(1) = 1$$
$$1 + 0 = 1$$

$x = 1$ se descarta pues indefine ambos logaritmos.

$$S = \{4\}$$

3. (5 puntos) Una fábrica determina que su ganancia diaria *P*, en dólares, está dada por la función $P(x)=80x-x^2$, donde $x\in[0,80]$ representa la cantidad de artículos que produce y vende diariamente. Haga un bosquejo de la gráfica de *P* y determine la ganancia diaria máxima posible para esa fábrica y la cantidad de artículos que debe producir y vender para obtenerla.

Solución

Como $x\in[0,80]$ y $P(x)=(80-x)x$ entonces la gráfica es una sección de una parábola cóncava hacia abajo que interseca al eje X en los puntos $(0,0)$ y $(80,0)$ y tiene como eje de simetría $x=40$. El vértice es $(40,1600)$.

Por lo tanto la ganancia diaria máxima posible es $1600 y se obtiene cuando se producen y venden 40 artículos.