



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica



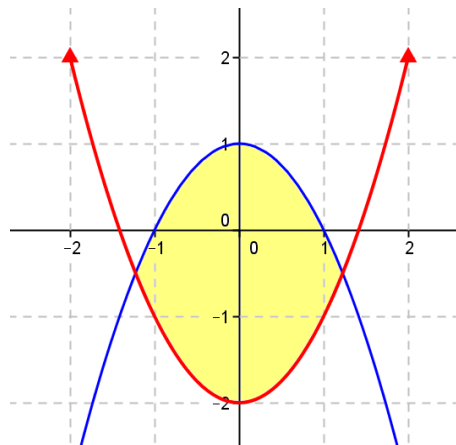
MATEM - Precálculo

Undécimo Año

I EXAMEN PARCIAL 2014

Nombre: _____ código: _____

Colegio: _____



Fórmula

1

Sábado 26 de abril

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos), la segunda es de completar (8 puntos) y la tercera es de desarrollo (18 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará.**
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 30 puntos)

1. Una de las soluciones de la ecuación $\frac{x^2}{2} - 3x = 1$ es

(A) $-3 - \sqrt{11}$

(B) $-3 + \sqrt{11}$

(C) $\frac{3 + \sqrt{11}}{2}$

(D) $3 + \sqrt{11}$

2. La ecuación $2x^3 - 7x^2 - 8x + x^4 + 12 = 0$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

3. La ecuación $|2x + 1| + 3 = 0$ tiene la siguiente cantidad de soluciones

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

4. Se puede asegurar que si p es un número real, la ecuación cuadrática $x^2 + px - 3 = 0$ tiene

- (A) una única solución real para cualquier valor de p
- (B) dos soluciones reales para cualquier valor de p
- (C) dos soluciones reales solo si $p > 0$
- (D) una única solución real si $p = 0$

5. El conjunto solución de la ecuación $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{3}$ tiene

- (A) cero elementos.
- (B) dos elementos positivos.
- (C) dos elementos negativos.
- (D) un elemento positivo y uno negativo.

6. El conjunto solución de la ecuación $\frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 1} = 0$ es

- (A) $\{1, -1\}$
- (B) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$
- (C) $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$
- (D) $\left\{1, -1, \frac{3}{2}\right\}$

7. El conjunto solución de $\sqrt[8]{(x+6)^8} = 5$ es

- (A) \emptyset
- (B) $\{-1\}$
- (C) $\{-11\}$
- (D) $\{-1, -11\}$

8. El conjunto solución de la ecuación $\sqrt{-x+6} = x$ es

- (A) \emptyset
- (B) $S = \{2\}$
- (C) $S = \{-2, 3\}$
- (D) $S = \{-3, 2\}$

9. Para resolver la ecuación $2x - \sqrt{x-1} = 3x - 7$ se buscan las soluciones de la siguiente ecuación

- (A) $13x^2 - 25x + 50 = 0$
- (B) $x^2 - 15x + 50 = 0$
- (C) $x^2 - x + 50 = 0$
- (D) $x^2 + x - 50 = 0$

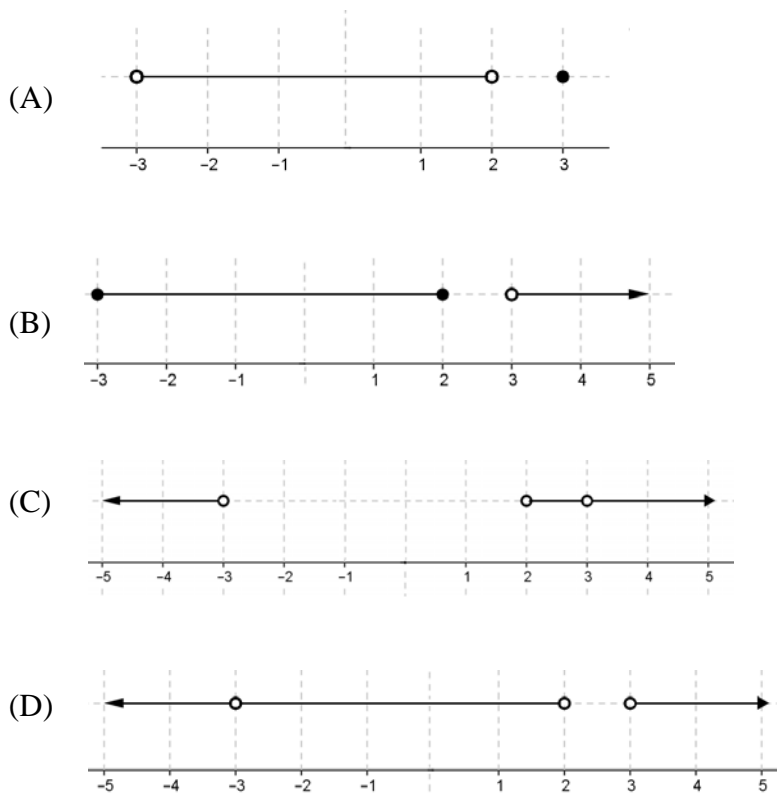
10. El conjunto solución de $|2014 - x| \leq 0$ es

- (A) \mathbb{R}
- (B) \emptyset
- (C) $\{2014\}$
- (D) $\mathbb{R} - \{2014\}$

11. El conjunto solución de $|3 - x| \geq 5$ es

- (A) $[-2, 8]$
 (B) $[-8, 2]$
 (C) $]-\infty, -8] \cup [2, +\infty[$
 (D) $]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$

12. Una representación gráfica del conjunto solución de $\frac{(x-3)^2}{(x+3)(2-x)} \geq 0$ es



13. El conjunto solución de $(x-4)^3 \cdot (2x+1)^7 \geq 0$ corresponde a

- (A) $\left[-4, \frac{1}{2}\right]$
- (B) $\left[\frac{-1}{2}, 4\right]$
- (C) $]-\infty, -4] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty[$
- (D) $]-\infty, \frac{-1}{2}] \cup [4, +\infty[$

14. El conjunto solución de $(-x^2 - x - 1)(x + 2) \geq 0$ es

- (A) $[2, +\infty[$
- (B) $]-\infty, 2]$
- (C) $[-2, +\infty[$
- (D) $]-\infty, -2]$

15. El conjunto solución de $\frac{1}{x-3} > -1$ corresponde a

- (A) $]2, 3[$
- (B) $]2, +\infty[$
- (C) $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$
- (D) $]-\infty, -3[\cup]-2, +\infty[$

16. Considere la función $f : [-3, 10] \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -3x + 5$ y analice las siguientes proposiciones:

I. La preimagen de 17 bajo la función f es -4 .

II. La imagen de -3 bajo la función f es 14.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

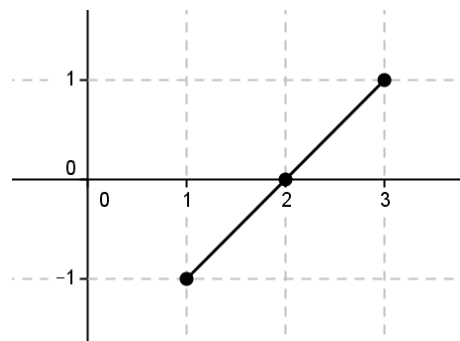
- (A) Sólo la I
- (B) Sólo la II
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

17. Si $f(x) = 5 + a$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, entonces es correcto que

- (A) $f(-5) = 0$
- (B) $f(5) > f(-5)$
- (C) $f(-5) > f(5)$
- (D) $f(-5) = f(5)$

18. La figura representa la gráfica de una función f . Entonces, el conjunto solución de $f(x) \geq 0$ corresponde a

- (A) $[0, 1]$
- (B) $[-1, 0]$
- (C) $[2, 3]$
- (D) $]2, 3]$



19. El ámbito de la función $f(x) = |x| - 2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es

- (A) \mathbb{R}
- (B) $[0, +\infty[$
- (C) $[-2, +\infty[$
- (D) $] -2, +\infty[$

20. En un rectángulo, el largo mide 5cm menos que el doble del ancho. Si x representa la medida de ancho entonces la medida de la diagonal d en función de x es

- (A) $d(x) = x^2 + (2x - 5)^2$
- (B) $d(x) = \sqrt{x^2 + (2x - 5)^2}$
- (C) $d(x) = 3x - 5$
- (D) $d(x) = x(2x - 5)$

21. El dominio máximo de $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x+3}}$ corresponde a

- (A) $[2, +\infty[$
- (B) $]2, +\infty[$
- (C) $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$
- (D) $\left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[$

22. Si $f(x) = x^2 - 2x$ y $b \neq 0$ entonces la expresión $\frac{f(a+b) - f(a-b)}{2b}$ es igual a

(A) $2a - 2$

(B) $4ab - 2$

(C) $2a - 4b$

(D) $\frac{2ab - 2a}{b}$

23. Si el par ordenado $(n-3, 2n+2)$ corresponde a un punto de la gráfica de la función

$f(x) = 3 - 3x$ entonces, el valor de n es

(A) -2

(B) 2

(C) $\frac{8}{5}$

(D) 0

24. Sea $f: \{a, b\} \rightarrow B$ una función sobreyectiva pero **no** inyectiva. Analice las siguientes proposiciones:

I. $f(a) = f(b)$

II. B tiene exactamente dos elementos.

De las afirmaciones anteriores son verdaderas

(A) solamente I.

(B) solamente II.

(C) la I y la II.

(D) ni la I ni la II.

25. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ es una función **sobreyectiva**, un posible criterio para f es

(A) $f(x) = \sqrt{x}$

(B) $f(x) = x$

(C) $f(x) = -|x|$

(D) $f(x) = x^2$

26. Si $(2,3)$ y $(3,4)$ son elementos del gráfico de una función biyectiva f . Analice las siguientes proposiciones:

I. $f(4) = 5$

II. $f^{-1}(3) = 2$

¿Cuál (es) de las proposiciones anteriores son, **con certeza** verdaderas?

(A) Sólo la I

(B) Sólo la II

(C) Ambas

(D) Ninguna

27. El criterio de la función inversa de $f(x) = x^2 - 6x + 1$, $f : [3, +\infty[\rightarrow [-8, +\infty[$ es

(A) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+8} + 3,$

(B) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+8} + 3,$

(C) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-8} - 3,$

(D) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-8} + 3,$

28. Si f y g son funciones definidas en su dominio máximo, tales que $f(x) = \frac{x-7}{x}$ y

$g(x) = \frac{3}{x+5}$, entonces, el dominio de $f - g$ es igual a

- (A) \mathbb{R}
- (B) $\mathbb{R} - \{7\}$
- (C) $\mathbb{R} - \{-5, 0\}$
- (D) $\mathbb{R} - \{-5, 0, 7\}$

29. Si f y g son funciones definidas en su dominio máximo, tales que $f(x) = x^2$ y

$g(x) = -2x + 7$, entonces $(f \circ g)(-3)$ es igual a

- (A) 81
- (B) -11
- (C) -19
- (D) 169

30. Si f y g son funciones definidas en su dominio máximo, tales que $f(x) = \sqrt{x+2}$ y

$g(x) = x^2 - 5$, entonces, $(g \circ f)(x)$ es igual a

- (A) $x - 3$
- (B) $x^2 - 23$
- (C) $\sqrt{x^2 - 3}$
- (D) $x^2 + 4x - 1$

Fin de la primera parte



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica



PRIMER EXAMEN PARCIAL 2014 - Sábado 26 de abril

Nombre completo: _____

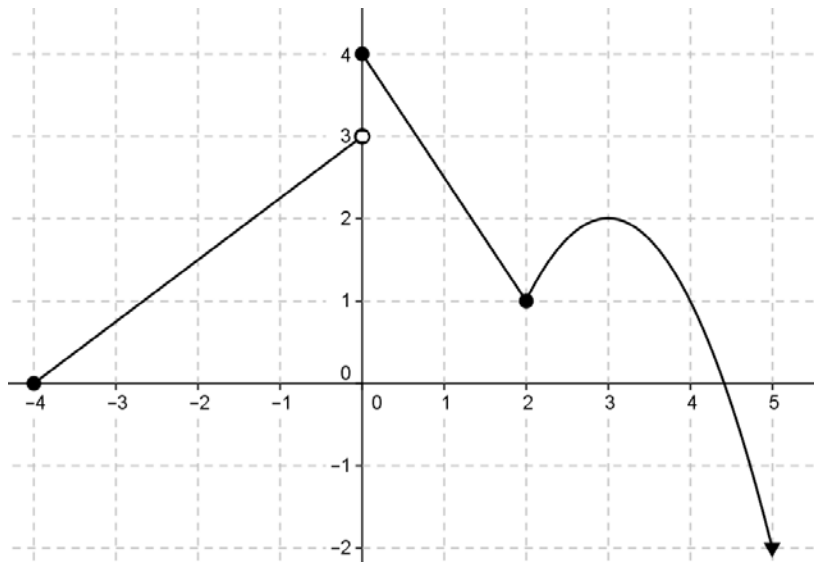
CÓDIGO: _____

COLEGIO: _____

C	
D1	
D2	
D3	

SEGUNDA PARTE. COMPLETE (Valor 8 puntos)

- a) (4 puntos) A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



1) El dominio de f : _____

2) El ámbito de f : _____

3) La cantidad de preimágenes de 3 es igual a _____

4) Un intervalo donde la función es creciente: _____

b) (4 puntos) Considere una función con criterio $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -x^2+2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \end{cases}$

Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.

- a) El dominio máximo de la función corresponde a _____.
- b) La intersección con el eje x corresponde al **punto** _____.
- c) La intersección con el eje y corresponde al **punto** _____.
- d) La imagen de 3 es igual a _____.

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 18 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{2}{4x-12} > \frac{6x}{x^2-4x+3}$$

2. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$(1-2x)(x^2-2x) = x^2(x-2)^2$$

3. (6 puntos) **Escoja UNO** de los siguientes problemas y resuélvalo usando ecuaciones. **Si resuelve los dos, se le calificará únicamente el primero que resuelva.**

OPCIÓN 1:

Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 km. Si la velocidad hubiera sido 20 km por hora más que la que llevaba, hubiera tardado dos horas menos en recorrer dicha distancia, ¿en qué tiempo recorrió los 240 km?

OPCIÓN 2:

Una caja sin tapa se debe construir cortando de las esquinas de una hoja de lata rectangular, cuya longitud es el doble de su ancho, cuatro cuadrados de 3 pulgadas de lado. ¿Qué tamaño de hoja producirá una caja con un volumen de 60 pulgadas cúbicas?

Fin del examen



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica



SOLUCIONARIO

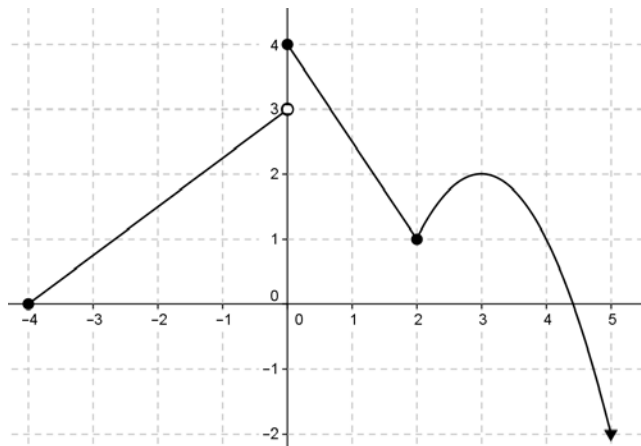
PRIMER EXAMEN PARCIAL 2014 - Sábado 26 de abril

Selección única

1	D	8	B	15	C	22	A	29	D
2	D	9	B	16	B	23	B	30	A
3	A	10	C	17	D	24	A		
4	B	11	D	18	C	25	D		
5	D	12	A	19	C	26	B		
6	B	13	D	20	B	27	A		
7	D	14	D	21	A	28	C		

SEGUNDA PARTE. COMPLETE (Valor 8 puntos)

- a) (4 puntos) A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



- El dominio de f : $[-4, +\infty[$
- El ámbito de f : $]-\infty, 4]$
- La cantidad de preimágenes de 3 es igual a 1
- Un intervalo donde la función es creciente: $[2, 3]$

b) Considere una función con criterio $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -x^2+2 & \text{si } -1 \leq x < 2 \end{cases}$

Escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.

- a) El dominio máximo de la función corresponde a $[-1, 4[$.
- b) La intersección con el eje x corresponde al punto $(\sqrt{2}, 0)$.
- c) La intersección con el eje y corresponde al punto $(0, 2)$.
- d) La imagen de 3 es igual a 2 .

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 18 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{2}{4x-12} > \frac{6x}{x^2-4x+3}$$

Solución:

$$\frac{2}{4x-12} > \frac{6x}{x^2-4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(x-3)} > \frac{6x}{x^2-4x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(x-3)} - \frac{6x}{(x-3)(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)-12x}{2(x-3)(x-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-11x-1)}{2(x-3)(x-1)} > 0$$

	$-\infty$	$\frac{-1}{11}$	1	3	$+\infty$
$-11x-1$	+	●	-	-	-
$x-3$	-	-	-	○	+
$x-1$	-	-	○	+	+
$\frac{(-11x-1)}{2(x-1)(x-3)}$	+	-	+	-	

R/ El conjunto solución es $\left] -\infty, \frac{-1}{11} \right[\cup] 1, 3 \left[$

2. (6 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$(1-2x)(x^2-2x) = x^2(x-2)^2$$

Solución:

$$(1-2x)(x^2-2x) = x^2(x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)(x^2-2x) - x^2(x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)x(x-2) - x^2(x-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)[(1-2x) - x(x-2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(1-2x-x^2+2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(1-x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)(1-x)(1+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \vee x=-1 \vee x=1$$

$$\therefore S = \{-1, 0, 1, 2\}$$

3. (6 puntos) **Escoja UNO** de los siguientes problemas y resuélvalo usando ecuaciones. **Si resuelve los dos, se le calificará únicamente el primero que resuelva.**

OPCIÓN 1:

Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 km. Si la velocidad hubiera sido 20 km por hora más que la que llevaba, hubiera tardado dos horas menos en recorrer dicha distancia, ¿en qué tiempo recorrió los 240 km?

Solución:

Para resolver este problema se utiliza la relación $v = \frac{d}{t}$ entre distancia recorrida d , velocidad media v y tiempo transcurrido t .

Se pueden ordenar los datos del problema en el siguiente cuadro:

	<i>distancia</i>	<i>velocidad</i>	<i>tiempo</i>
Como se hizo el recorrido	240	v	$\frac{240}{v}$
Si hubiera viajado a $20 \frac{km}{h}$ más	240	$v + 20$	$\frac{240}{v + 20}$

Además, si el viaje se hubiera realizado de la segunda manera, el tiempo hubiera sido dos horas menor, de donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{240}{v+20} = \frac{240}{v} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{240v - 240(v+20) + 2v(v+20)}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{240v - 240v - 4800 + 2v^2 + 40v}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2v^2 + 40v - 4800}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(v^2 + 20v - 2400)}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2(v+60)(v-40)}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow v = -60 \text{ o } v = 40$$

Como v es la velocidad del tren, se requiere que $v > 0$, por lo tanto $v = 40$ y entonces

$$t = \frac{d}{v} = \frac{240}{40} = 6.$$

R/ El tiempo en que se hizo el viaje fue 6 horas.

OPCIÓN 2:

Una caja sin tapa se debe construir cortando de las esquinas de una hoja de lata rectangular, cuya longitud es el doble de su ancho, cuatro cuadrados de 3 pulgadas de lado. ¿Qué tamaño de hoja producirá una caja con un volumen de 60 pulgadas cúbicas?

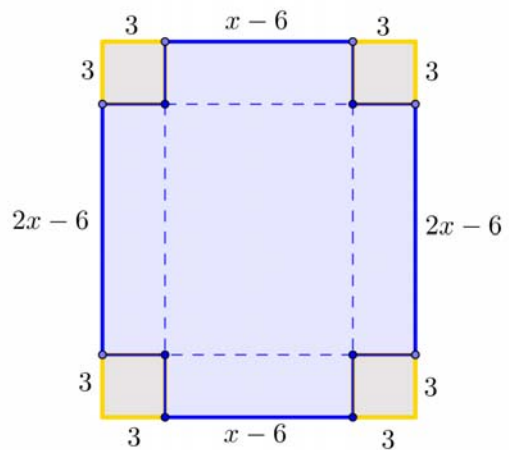
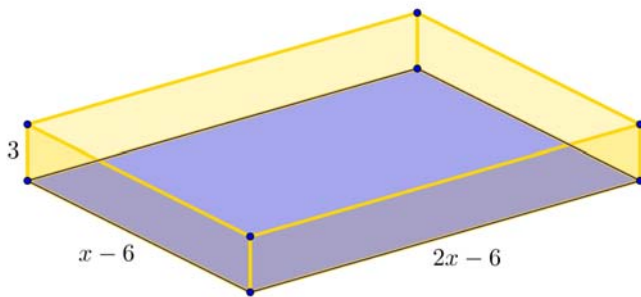
Solución:

Sea x el ancho de la hoja de la lata, entonces el largo de la hoja es $2x$. Así,

$x - 6$ es el ancho de la caja (note que x debe ser mayor que 6)

$2x - 6$ es el largo de la caja

3 es la altura de la caja



Dado que el volumen de la caja es el producto de su ancho, altura y largo, se tiene

$$V = 3(x - 6)(2x - 6), \text{ donde además se quiere que el volumen sea de } 60 \text{ pulg}^3.$$

$$\Rightarrow 60 = 3(2x^2 - 6x - 12x + 36)$$

$$\Rightarrow 20 = 2x^2 - 6x - 12x + 36$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 18x + 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1, \quad x = 8$$

Pero x no puede ser 1 (el largo y el ancho serían negativos) entonces $x = 8$

R/ El tamaño de la hoja que producirá una caja con volumen de 60 pulg³ es de 8 por 16 pulgadas.