Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

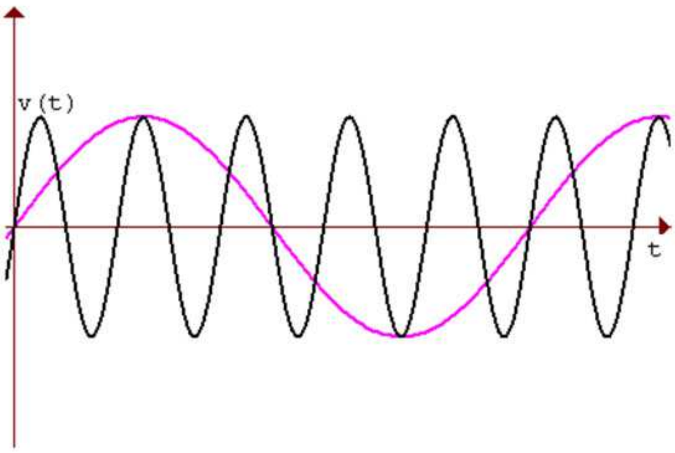
PRECÁLCULO

-Décimo Año-

IV EXAMEN PARCIAL 2015

Nombre: ___________________________________ código: _______

Colegio: ____



Fórmula

1

Sábado 14 de noviembre de 2015

<u>INSTRUCCIONES</u>

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (23 puntos), la segunda es de Respuesta Corta (7 puntos) y la tercera de desarrollo (15 puntos).

4. Las partes de Selección y Respuesta Corta deben ser contestadas en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente tinta indeleble.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 23 puntos)**

1. Si $P(a,b)$ es un punto de la circunferencia trigonométrica, analice las siguientes proposiciones:

   I. $a = \sqrt{1-b^2}$

   II. $a \in [-1,1]$

De ellas con certeza son verdaderas:

A. Solamente II
B. Solamente I
C. Ninguna
D. Ambas

2. Si $P(a,b)$ es un punto de la circunferencia trigonométrica, analice las siguientes proposiciones:

   I. Si $a = 1$ entonces $b = 0$

   II. Si $a = 0$ entonces $b = 1$

De ellas con certeza son verdaderas:

A. Solamente II
B. Solamente I
C. Ninguna
D. Ambas

3. Si al número real t se le asocia el punto $P(a,b)$ de la circunferencia trigonométrica entonces al número real $t+\pi$ se le asocia el punto de coordenadas

A. (a,b)

B. $(-a,b)$

C. $(a,-b)$

D. $(-a,-b)$

4. Si $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\sec\alpha < 0$ entonces el punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real α se localiza en el cuadrante

A. I

B. II

C. III

D. IV

5. Si al número real t se le asocia el punto $P(a, b)$ de la circunferencia trigonométrica entonces el valor de $\csc t$ es

A. $\dfrac{1}{a}$

B. $\dfrac{1}{b}$

C. $\dfrac{b}{a}$

D. $\dfrac{a}{b}$

6. El punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real $\dfrac{67\pi}{6}$ se localiza en el cuadrante

A. I

B. II

C. III

D. IV

7. La expresión $\operatorname{sen}(4\pi) + \tan\frac{11\pi}{6}$ es igual a

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$

D. $1-\sqrt{3}$

8. El valor numérico de la expresión $sen^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ es

A. $\frac{3}{2}$

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 0

9. El valor numérico de $tan\frac{4\pi}{3}+\text{sen}\frac{5\pi}{3}$ es:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$

10. Si $\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan a=-1$ entonces al número real a se le asocia el mismo punto de la circunferencia trigonométrica que al número

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{3\pi}{4}$

C. $\frac{5\pi}{4}$

D. $\frac{7\pi}{4}$

11. La ecuación de una asíntota de la gráfica de la función tangente, definida en su dominio máximo, corresponde a

A. $x = \frac{\pi}{4}$

B. $x = \frac{\pi}{3}$

C. $x = \frac{\pi}{2}$

D. $x = \pi$

12. El ámbito de la función cosecante, definida en su dominio máximo, corresponde a

A. $[-1,1]$

B. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

C. $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

D. $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

13. El período de la función definida en su dominio máximo cuyo criterio es $f(x) = -5\cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$ corresponde a

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. 2π

D. 8π

14. El corrimiento de fase de la función cuyo criterio es $f(x) = \operatorname{sen}(2x+\pi)$ corresponde a

A. $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda

B. $\frac{\pi}{2}$ hacia la derecha

C. π hacia la derecha

D. π hacia la izquierda

15. La expresión $\sec x - \operatorname{sen} x \, tanx$ es igual a

A. $\cos x$

B. $\dfrac{\cos^2 x \, tanx}{\operatorname{sen} x}$

C. $\operatorname{sen} x$

D. $\operatorname{sen} x(1 - tanx)$

16. Considere las siguientes afirmaciones

I. $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

II. $tan\alpha = tan(-\alpha)$

III. $\cos(2\pi + \alpha) = \cos(-\alpha)$

De las anteriores proposiciones es verdadera

A. la II y la III

B. la I y la III

C. la I y la II

D. solo la III

17. Al simplificar $\dfrac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ se obtiene:

A. $\tan(2\alpha)$

B. $2\cot(2\alpha)$

C. $\cot(2\alpha)$

D. $2\tan(2\alpha)$

18. La expresión $\operatorname{arcsen}\left(\cos\dfrac{-\pi}{6}\right)$ es igual a

A. $\dfrac{\pi}{3}$

B. $\dfrac{5\pi}{6}$

C. $\dfrac{5\pi}{3}$

D. $\dfrac{-\pi}{6}$

19. El valor de $\cos[2\arctan(1)]$ corresponde a

A. -1

B. 0

C. 1

D. $\frac{\pi}{2}$

20. En el intervalo $]-3,3[$, el número de soluciones de la ecuación $\cos^2(x) - \cos(x) - 2 = 0$ es

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

21. En el intervalo $[0,2\pi[$ el conjunto solución de la ecuación $\operatorname{sen} x \tan x = \operatorname{sen} x$ corresponde a

A. $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

B. $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

C. $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

D. $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

22. Una solución de la ecuación $\cos x + \operatorname{sen} x = 0$ corresponde a

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $-\frac{\pi}{4}$

D. $-\frac{\pi}{2}$

23. Considere las siguientes ecuaciones:

I. $2015 \cos x = 1$
II. $\tan x = 2015$
III. $2015 - \operatorname{sen} x = 0$

¿Cuáles de ellas tienen soluciones reales?

A. I y II solamente
B. I y III solamente
C. II y III solamente
D. Todas

SEGUNDA PARTE. RESPUESTA CORTA. (**Valor 7 puntos)**

En cada uno de los siguientes ejercicios escriba en el espacio lo que se le solicita.

1. Si al número real t se le asocia el punto $P\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ de la circunferencia trigonométrica. Indique el valor de:

   A. $\tan(t) =$ ______________

   B. $\cos(-t) =$ ____________

2. Sobre la función $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$ indique:

   A. Un intervalo donde la función es creciente: ______________

   B. Cantidad de intersecciones con el eje X: _______________

3. Considere la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Indique:

   A. Amplitud: _______________

   B. Ámbito: _______________

   C. Intersección con el eje Y: _______________

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CUARTO EXAMEN PARCIAL 2015- Sábado 14 de noviembre

Nombre completo: ___________________________________ CÓDIGO: ___________

COLEGIO: ____

Respuestas de la II Parte:

1.A.	
1.B	
2.A	
2.B	
3.A	
3.B	
3.C	

Puntos obtenidos en la III PARTE

PREGUNTA	Valor	Puntos obtenidos
D1	6 puntos	
D2	4 puntos	
D3	5 puntos	
TOTAL	15	

<u>TERCERA PARTE. DESARROLLO</u> **(Valor 15 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica en $\mathbb{R}$: 6 puntos.

$$\frac{\cos^2 x - \cos x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

2. Calcule el valor de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ si se sabe que $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4 puntos.

3. Verifique la siguiente identidad trigonométrica: 5 puntos.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}(-x)$$

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

SOLUCIONARIO IV EXAMEN PARCIAL 2015

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 23 puntos)**

1	A	9	A	17	C
2	B	10	D	18	A
3	D	11	C	19	B
4	C	12	C	20	A
5	B	13	D	21	B
6	C	14	A	22	C
7	B	15	A	23	A
8	A	16	D		

SEGUNDA PARTE. RESPUESTA CORTA. **(Valor 7 puntos)**

En cada uno de los siguientes ejercicios escriba en el espacio lo que se le solicita.

1. Si al número real t se le asocia el punto $P\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ de la circunferencia trigonométrica. Indique el valor de:

   a. $\tan(t) =$ ____$\frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$____________

   b. $\cos(-t) =$ _____$\frac{12}{13}$_______

2. Sobre la función $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}\, x$ indique:

   a. Un intervalo donde la función es creciente: ____$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$_______

   b. Cantidad de intersecciones con el eje X: ___3___________

3. Considere la función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Indique:

   a. Amplitud: ______1________

   b. Ámbito: _______[2,4]_______

   c. Intersección con el eje Y: ______(0,3)________

TERCERA PARTE. DESARROLLO **(Valor 15 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica en $\mathbb{R}$: 6 puntos.

$$\frac{\cos^2 x - \cos x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = 0$$

Solución

Se debe cumplir que:

$$\cos^2 x - \cos x - \operatorname{sen}^2 x = 0$$
$$\cos^2 x - \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0$$
$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$
$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\operatorname{sen} x \neq 0$$
$$x \neq k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\cos x = 1$
Se descarta pues si $\cos x = 1$ entonces $\operatorname{sen} x = 0$.

$$S = \left\{\pm\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Calcule el valor de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ si se sabe que $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ y $\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$. 4 puntos.

Solución

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$$

3. Verifique la siguiente identidad trigonométrica: 5 puntos.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}(-x)$$

Solución

$$\begin{aligned}
&\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\\
&= \cos x\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \left[\operatorname{sen} x\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\ \cos(x)\right]\\
&= \cos x\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{sen} x\ \frac{1}{2} - \operatorname{sen} x\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\\
&= -\operatorname{sen} x\\
&= \operatorname{sen}(-x)
\end{aligned}$$