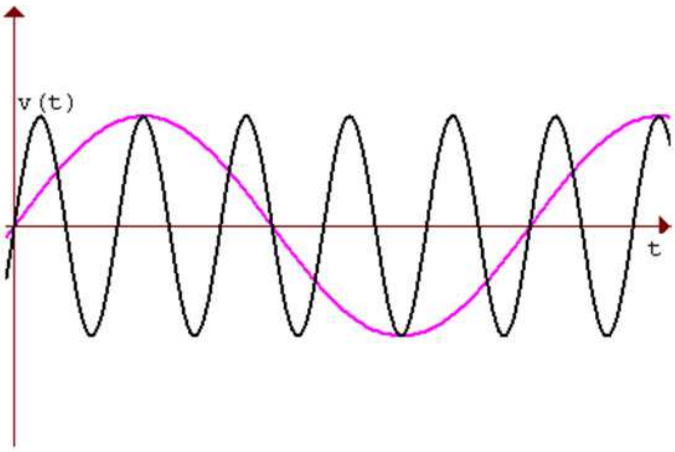
Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

PRECÁLCULO
-Décimo Año-

IV EXAMEN PARCIAL 2016

Nombre: ___________________________________ código: _______

Colegio: ____



Fórmula

1

Sábado 12 de noviembre de 2016

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de Selección Única (23 puntos), la segunda es de Respuesta Corta (7 puntos) y la tercera de Desarrollo (16 puntos).

4. La parte de Selección Única debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente tinta indeleble.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 23 puntos)**

1. Si $P(a, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es un punto de la circunferencia trigonométrica asociado número real t, analice las siguientes proposiciones:

I. $sen(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
II. $a < 1$

De ellas con certeza son verdaderas:

a) Solamente II

b) Solamente I

c) Ninguna

d) Ambas

2. Si $P(a, b)$ es un punto de la circunferencia trigonométrica asociado a un número real t, analice las siguientes proposiciones:

I. Si $a = 1$, entonces t es un múltiplo de $\frac{\pi}{2}$
II. Si $a = 0$, entonces $b = 1$

De ellas con certeza son verdaderas:

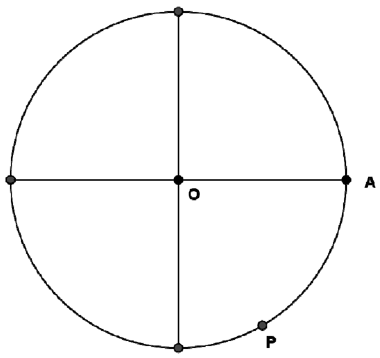
a) Solamente II

b) Solamente I

c) Ninguna

d) Ambas

3. Si al número real t se le asocia el punto $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ de la circunferencia trigonométrica, entonces, un posible valor para t corresponde a



a) $\frac{-\pi}{3}$

b) $\frac{-\pi}{6}$

c) $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{-5\pi}{6}$

4. Si $\operatorname{sen}\alpha < 0$ y $\tan\alpha < 0$ entonces el punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real α se localiza en el cuadrante

a) I
b) II
c) III
d) IV

5. Si al número real t se le asocia el punto $P(a, b)$ de la circunferencia trigonométrica entonces el valor de $\csc t$ es

a) $\frac{1}{a}$

b) $\frac{1}{b}$

c) $\frac{b}{a}$

d) $\frac{a}{b}$

6. El punto de la circunferencia trigonométrica asociado al número real $\frac{-121\pi}{3}$ se localiza en el cuadrante

a) I

b) II

c) III

d) IV

7. La expresión $\operatorname{sen}(15\pi) + \cos\frac{11\pi}{6}$ es igual a

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{-1}{2}$

d) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

8. El valor numérico de la expresión $sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 0

9. El valor numérico de $\tan\frac{\pi}{3}+sen\frac{4\pi}{3}$ es

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{-1+2\sqrt{3}}{2}$

10. Si $\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\tan a = -1$ entonces al número real a se le asocia el mismo punto de la circunferencia trigonométrica que al número

a) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{5\pi}{4}$

d) $\frac{7\pi}{4}$

11. La ecuación de una asíntota a la gráfica de la función tangente, definida en su dominio máximo, corresponde a

a) $x = \frac{\pi}{4}$

b) $x = \frac{\pi}{3}$

c) $x = \frac{-\pi}{2}$

d) $x = \pi$

12. Si la función arcotangente está definida en su dominio máximo, entonces su ámbito corresponde a

a) $[-1,1]$

b) $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

c) $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

d) $\mathbb{R}-\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

13. El período de la función definida en su dominio máximo cuyo criterio es $f(x)=2\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$ corresponde a

a) π

b) $\frac{\pi}{2}$

c) $2\pi^2$

d) 2

14. El corrimiento de fase de la función cuyo criterio es $f(x)=sen(2x-\pi)$ corresponde a

a) $-\pi$

b) π

c) $-\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{\pi}{2}$

15. La expresión $tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cdot\ sec\,\beta$ es equivalente a

a) $sen\,\beta$

b) $csc\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

c) $sec\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

d) $\frac{1}{csc\beta}$

16. Considere las siguientes afirmaciones

I. $sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\alpha$

II. $tan\alpha = tan(-\alpha)$

III. $\cos(2\pi+\alpha)=\cos(-\alpha)$

De las anteriores proposiciones es, **con certeza**, verdadera

a) solo la I

b) solo la III

c) la I y la III

d) la II y la III

17. Al simplificar $tan(\alpha)\ \cdot sen(2\alpha)$ se obtiene

a) $sen^2\alpha$

b) $tan^2\alpha$

c) $2sen^2\alpha$

d) $2\tan(2\alpha)$

18. El valor numérico de la expresión $arcsen\left(\frac{1}{2}\right)$ es igual a

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{5\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{6}$

19. El valor de $arcsen\,\frac{\sqrt{2}}{2} - arcos\,0$ corresponde a

a) $\frac{-\pi}{4}$

b) $\frac{-\pi}{2}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{-5\pi}{4}$

20. En el intervalo $]0,2\pi]$, el número de soluciones de la ecuación $4\cos^2(x) - 3 = 0$ es

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

21. En el intervalo $[0,2\pi[$ el conjunto solución de la ecuación $cos(x)\tan(x) - cos(x) = 0$ corresponde a

a) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

b) $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

22. Una solución de la ecuación $\cos(x) + \operatorname{sen}(x) = 0$ en $\mathbb{R}$ corresponde a

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $-\frac{\pi}{4}$

d) $-\frac{\pi}{2}$

23. Considere las siguientes ecuaciones:

I. $\cos(x) = \pi$
II. $\tan(x) = \frac{-5\pi}{2}$
III. $1 - \cot(\mathrm{x}) = 0$

De ellas tienen soluciones reales solamente

a) II

b) III

c) I y II

d) II y III

SEGUNDA PARTE. RESPUESTA CORTA. (**Valor 7 puntos)**

En cada uno de los siguientes ejercicios escriba en el espacio lo que se le solicita.

1. Si al número real t se le asocia el punto $P(y, a)$ de la circunferencia trigonométrica, el cual se encuentra en el segundo cuadrante. Indique en términos de a el valor de:

   a. $\operatorname{sen}(-t) =$ ___ $-a$____________

   b. $\tan(t) =$ _____ $\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}$ _______

2. Sea la relación $f:]-2\pi, \pi[- \left\{\pm\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(x)$ indique:

   a. Una ecuación de una asíntota: ____ $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{-\pi}{2}$_, $x = \frac{-3\pi}{2}$______

   b. Cantidad de intersecciones con el eje X: __2________

3. Considere la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = -2\operatorname{sen}(4x - \pi)$. Indique:

   a. Amplitud: ______2________

   b. Ámbito: _______$[-2,2]$_______

   c. Punto de intersección con el eje Y: ______(0,0)________

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

CUARTO EXAMEN PARCIAL 2016- Sábado 12 de noviembre

Nombre completo: ________________________________ CÓDIGO: __________

COLEGIO: ____

Respuestas de la II Parte:

1.a.	
1.b	
2.a	
2.b	
3.a	
3.b	
3.c	

Puntos obtenidos en la III PARTE

PREGUNTA	Valor	Puntos obtenidos
D1	7 puntos	
D2	4 puntos	
D3	5 puntos	
TOTAL	16 puntos	

($\mathbf{Valor 15\ puntos}$) TERCERA PARTE. DESARROLLO

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. (7 puntos) Resuelva, en IR, la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2sen(x)\left(\frac{cos(x)}{cos(2x)}+1\right)=0$$

Solución

Se debe cumplir que:

$$cos(2x) \neq 0$$

$$2x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2sen(x)\left(\frac{cos(x)}{cos(2x)}+1\right)=0$$

(1) $2sen(x)=0$

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

(2) $\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}+1=0$

$$\rightarrow\ cos(x)+cos(2x)=0$$

$$\cos(x)+cos^2(x)-sen^2(x)=0$$

$$\cos(x)+cos^2(x)-(1-cos^2(x))=0$$

$$2cos^2(x)+cos(x)-1=0$$

$$(2cos(x)-1)(cos(x)+1)=0$$

$2cos(x)-1=0 \quad cos(x)=\frac{1}{2} \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$cosx+1=0 \quad cosx=-1 \quad x=\pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$S=\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. $(4\,puntos)$ Sean α y β los números reales asociados a los puntos de la circunferencia trigonométrica $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ respectivamente, calcule el valor de $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$,

.

Solución

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = sen\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi+\frac{7\pi}{6}+2k_1\pi\right) = sen\left(\frac{3\pi}{2}+4k_2\pi\right) = -1$$

O bien

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2} = -1$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. $(5\ puntos)$Verifique la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{sec(x) - csc(x)}{sec(x) + \ csc(x)} = \frac{tan(x) - 1}{tan(x) + 1}$$

Solución

$$\frac{sec(x) - csc(x)}{sec(x) + \ csc(x)} = \frac{\frac{1}{cos(x)} - \frac{1}{sen(x)}}{\frac{1}{cos(x)} + \frac{1}{sen(x)}}$$

$$\frac{sen(x)}{sen(x)}\left(\frac{\frac{1}{cos(x)} - \frac{1}{sen(x)}}{\frac{1}{cos(x)} + \frac{1}{sen(x)}}\right) =$$

$$= \frac{\frac{sen(x)}{cos(x)} - 1}{\frac{sen(x)}{cos(x)} + 1}$$

$$= \frac{tan(x) - 1}{tan(x) + 1}$$

Nota. Pueden hacer otro procedimiento.

$$\frac{sec(x) - csc(x)}{sec(x) + csc(x)} = \frac{\frac{1}{cos(x)} - \frac{1}{sen(x)}}{\frac{1}{cos(x)} + \frac{1}{sen(x)}} = \frac{\frac{sen(x) - cos(x)}{sen(x)cos(x)}}{\frac{sen(x) + cos(x)}{sen(x)cos(x)}} = \frac{sen(x) - cos(x)}{sen(x) + cos(x)}$$

$$\frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1} = \frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)} - 1}{\frac{sen(x)}{\cos(x)} + 1} = \frac{\frac{sen(x) - \cos(x)}{\cos(x)}}{\frac{sen(x) + \cos(x)}{\cos(x)}} = \frac{sen(x) - \cos(x)}{sen(x) + \cos(x)}$$

Entonces $\frac{\boldsymbol{sec}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{csc}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{sec}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{csc}(\boldsymbol{x})} = \frac{\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})} = \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1}$

Por lo tanto $\frac{\boldsymbol{sec}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{csc}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{sec}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{csc}(\boldsymbol{x})} = \frac{\tan(x) - 1}{\tan(x) + 1}$