



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

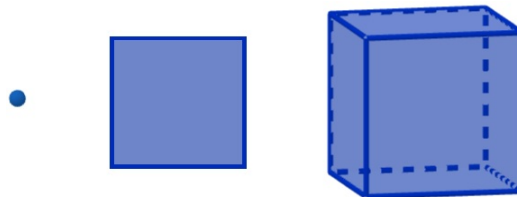
EMat Escuela de
Matemática



MATEM

Matemática Para la Enseñanza Media

Precálculo
III Examen parcial 2023



Nombre: _____

Colegio: _____

Código: _____

Fórmula:1

Sábado 9 de setiembre

Indicaciones

1. El tiempo máximo para resolver este examen es de 2 horas y 30 minutos.
2. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
3. Este examen consta de dos partes: selección única (30 puntos) y desarrollo (10 puntos).
4. La parte de selección única debe ser contestada en la **hoja de respuestas** que se le dará para tal efecto. Fírmela en el espacio correspondiente utilizando bolígrafo de tinta azul o negra indeleble.
5. En la **hoja de respuestas** usted deberá rellenar con **lápiz** la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja de respuestas.
6. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
7. En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente **bolígrafo** de tinta azul o negra indeleble.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna pregunta está desordenada, ésta no se calificará.
9. No se permite el uso de calculadora científica o programable. La calculadora que puede utilizar es la que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. Las ecuaciones, a menos que se indique lo contrario, deben resolverse en el conjunto de los números reales.

Selección única

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5^x - 4$. La gráfica de f es asintótica a la recta de ecuación

A) $y = -5$

B) $y = -4$

C) $y = 4$

D) $y = 5$

2. Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = -e^x + 4$ y analice las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de g es cóncava hacia arriba.

II. La gráfica de g no interseca al eje x .

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

A) Solo la I

B) Solo la II

C) Ambas

D) Ninguna

3. Considere la función $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 1$ y analice las siguientes proposiciones:

I. $j(-2023) > j(2023)$.

II. El ámbito es $[1, +\infty[$.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- A) Solo la I
- B) Solo la II
- C) Ambas
- D) Ninguna

4. Considere la función exponencial $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = a^{x-1} - 1$ y el par ordenado $(0, 3)$ que corresponde al corte con el eje y de la gráfica de h . Analice las siguientes proposiciones:

I. El valor de a es $\frac{1}{2}$.

II. La gráfica de h interseca al eje x en el punto $(1, 0)$.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- A) Solo la I
- B) Solo la II
- C) Ambas
- D) Ninguna

5. Considere la función $k : D_k \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x$. Si el ámbito de k es $\left]1, \frac{49}{9}\right]$, entonces el dominio D_k corresponde al intervalo
- A) $[-2, 0[$
 - B) $] -2, 0]$
 - C) $[0, 2[$
 - D) $]0, 2]$
6. Considere la función exponencial $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m(x) = a \cdot 2^x + b$. Si la gráfica de m es decreciente y **no** interseca al eje x , ¿cuál de las siguientes proposiciones se puede cumplir?
- A) $a > 0$ y $b > 0$.
 - B) $a > 0$ y $b < 0$.
 - C) $a < 0$ y $b > 0$.
 - D) $a < 0$ y $b < 0$.
7. Considere la función exponencial $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t(x) = 2^{-x}$, el valor de $3 \cdot t(3) \cdot t(-4)$ corresponde a
- A) 1
 - B) 6
 - C) -12
 - D) -36

8. Considere una función logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ y con criterio $f(x) = \log_a(3x)$. Si se sabe que $f(27) = 4$, entonces el valor de $f\left(\frac{1}{9}\right)$ es igual a

- A) -1
- B) 0
- C) 3
- D) 4

9. Considere a la función logarítmica g está definida en su dominio máximo y cumple que el corte de la gráfica con el eje x corresponde al punto $(2024, 0)$. El criterio de g puede ser

- A) $g(x) = \ln(x - 2023)$
- B) $g(x) = \ln(x + 2023)$
- C) $g(x) = \ln x - 2023$
- D) $g(x) = \ln x + 2023$

10. Considere la función $h :]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \log_{\frac{1}{5}}(x + 1)$ y analice las siguientes proposiciones:

I. $h(2023) > 0$.

II. El corte con el eje y corresponde al punto $(0, 0)$.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- A) Solo la I
- B) Solo la II
- C) Ambas
- D) Ninguna

11. Considere la función j con dominio D_j , ámbito $]-2, 3]$ y criterio $j(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$. El conjunto D_j es igual a

A) $\left[\frac{1}{8}, 4\right[$

B) $\left]\frac{1}{8}, 4\right]$

C) $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right[$

D) $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right]$

12. Considere la función $k : D_k \rightarrow \mathbb{R}$, con $k(x) = \log_3(x - 2)$ y analice las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de k tiene dominio máximo $]2, +\infty[$.

II. La gráfica de k es cóncava hacia arriba

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

A) Solo la I

B) Solo la II

C) Ambas

D) Ninguna

13. Considere la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{x}{4}\right)$. La gráfica de f es asintótica a la recta de ecuación

A) $x = 0$

B) $x = \frac{1}{4}$

C) $x = 2$

D) $x = 4$

14. Si $\ln a = 3k$ y $\ln b = -k$, entonces $\ln \left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^4}} \right)$ es equivalente a

A) $-2k$

B) $\frac{2k}{3}$

C) $\frac{10k}{3}$

D) $k - \frac{4}{3}$

15. La expresión $6 \ln(x) + \ln(5x) - \ln(5) - \ln(x^2y)$ es equivalente a

A) $\ln\left(\frac{x^5}{y}\right)$

B) $\ln\left(\frac{y}{x^5}\right)$

C) $\ln(yx^5)$

D) $\ln(x^5y)$

16. El conjunto solución de $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5} = 3$ corresponde a

A) $\{-1, 1\}$

B) $\{-2, 2\}$

C) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

D) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

17. Si $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -2$, entonces a es igual a
- A) e
 - B) e^2
 - C) $\frac{1}{e}$
 - D) $\frac{1}{e^2}$
18. La solución de la ecuación $\log(3x - 5) - \log(x) = 0$ es un número que pertenece al intervalo
- A) $]0, 1]$
 - B) $\left]1, \frac{5}{3}\right]$
 - C) $\left]\frac{5}{3}, 3\right]$
 - D) $]3, 5]$
19. En un polígono regular se pueden trazar 8 diagonales desde un vértice. ¿Qué nombre recibe dicho polígono?
- A) Octágono.
 - B) Decágono.
 - C) Dodecágono.
 - D) Endecágono.
20. ¿Cuál es el número de lados de un polígono regular que tiene 35 diagonales en total?
- A) 5
 - B) 8
 - C) 10
 - D) 18

21. Considere un polígono regular en el cual cada ángulo central mide 60° , entonces cada uno de sus ángulos internos mide
- A) 30°
 - B) 60°
 - C) 90°
 - D) 120°
22. Sea un polígono regular en el cual cada ángulo central mide 12° y cada lado mide 12 cm , entonces, el perímetro de ese polígono es igual a
- A) 144 cm
 - B) 216 cm
 - C) 360 cm
 - D) 540 cm
23. Si área de una circunferencia es $36\pi\text{ cm}^2$, entonces el área del hexágono regular inscrito en la circunferencia es igual a
- A) 36 cm^2
 - B) $24\sqrt{3}\text{ cm}^2$
 - C) $54\sqrt{3}\text{ cm}^2$
 - D) $72\sqrt{3}\text{ cm}^2$

24. Si el radio de un decágono regular es 10 cm y su apotema mide aproximadamente $9,51 \text{ cm}$, entonces su área es aproximadamente

- A) $14,69 \text{ cm}^2$
- B) $29,38 \text{ cm}^2$
- C) $146,93 \text{ cm}^2$
- D) $293,86 \text{ cm}^2$

25. Considere las siguientes proposiciones:

- I. Todo cuadrado es un rectángulo.
- II. Todo polígono regular es equiángulo.
- III. Todo paralelogramo es un rectángulo.

¿Cuáles de las proposiciones anteriores son verdaderas?

- A) Solo la I y II
- B) Solo la I y III
- C) Solo la II y III
- D) I, II y III

26. Si el perímetro de un hexágono regular inscrito a una circunferencia es $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$, entonces la longitud de dicha circunferencia es

- A) 3
- B) 18
- C) 3π
- D) $2\sqrt{3}$

27. Un prisma de base cuadrada tiene arista de la base de 10 cm y altura de 12 cm . El volumen de ese prisma es
- A) 200 cm^3
 - B) 480 cm^3
 - C) 680 cm^3
 - D) 1200 cm^3
28. Si el diámetro de una esfera es de 6 cm , entonces, el volumen de la esfera es
- A) 18π
 - B) 36π
 - C) 72π
 - D) 108π
29. El radio de un cono mide 6 cm y su altura mide 7 cm , entonces la generatriz del sólido mide
- A) $\sqrt{13}\text{ cm}$
 - B) $\sqrt{42}\text{ cm}$
 - C) $\sqrt{58}\text{ cm}$
 - D) $\sqrt{85}\text{ cm}$
30. El área total de un cilindro cuyo radio es de 5 cm y volumen $250\pi\text{ cm}^3$ es
- A) $25\pi\text{ cm}^2$
 - B) $50\pi\text{ cm}^2$
 - C) $100\pi\text{ cm}^2$
 - D) $150\pi\text{ cm}^2$



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM
Precálculo-
III Examen parcial 2023

Nombre: _____

Colegio: _____

Código: _____

Pregunta	Puntos
D1	
D2	

Fórmula: 1

Sábado 9 de setiembre

II parte: Desarrollo

1. Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación: (6 puntos)

$$2^{3x-5} = 7^{5-2x}$$

2. Calcule el volumen de un cubo si se sabe que su diagonal mide 5 cm (4 puntos)

Fin del examen



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

EMat Escuela de
Matemática

Proyecto MATEM - Precálculo - III Examen parcial 2023- Solucionario

Sábado 9 de setiembre

I parte: Selección única

1. B	9. A	17. B	25. A
2. D	10. B	18. C	26. D
3. A	11. A	19. D	
4. B	12. A	20. C	27. D
5. A	13. A	21. D	28. B
6. D	14. C	22. C	
7. B	15. A	23. C	29. D
8. A	16. B	24. D	30. D

II parte: Desarrollo

1. Determine la solución de la siguiente ecuación: (6 puntos)

$$2^{3x-5} = 7^{5-2x}$$

Solución:

Observación, para resolver este ejercicio, se deben introducir logaritmos de la base que se desee (positiva y distinta de 1), por lo que la forma en que está escrita la solución, puede variar de un estudiante a otro.

$$\begin{aligned} 2^{3x-5} &= 7^{5-2x} \\ \log_a (2^{3x-5}) &= \log_a (7^{5-2x}) \\ (3x - 5) \log_a (2) &= (5 - 2x) \log_a (7) \\ 3x \log_a (2) - 5 \log_a (2) &= 5 \log_a (7) - 2x \log_a (7) \\ 3x \log_a (2) + 2x \log_a (7) &= 5 \log_a (7) + 5 \log_a (2) \\ x [3 \log_a (2) + 2 \log_a (7)] &= 5 \log_a (7) + 5 \log_a (2) \\ x &= \frac{5 \log_a (7) + 5 \log_a (2)}{3 \log_a (2) + 2 \log_a (7)} \approx 2.2097 \end{aligned}$$

2. Calcule el volumen de un cubo si se sabe que su diagonal mide 5 cm (4 puntos)

Solución:

La diagonal d de un cubo cumple, con respecto a la arista a , que $d = a\sqrt{3}$, entonces, siendo $d = 5$ se tiene que $a\sqrt{3} = 5 \rightarrow a = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Ahora, el volumen $V = a^3 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{125}{3\sqrt{3}} = \frac{125\sqrt{3}}{9} \text{ cm}^3$