



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica



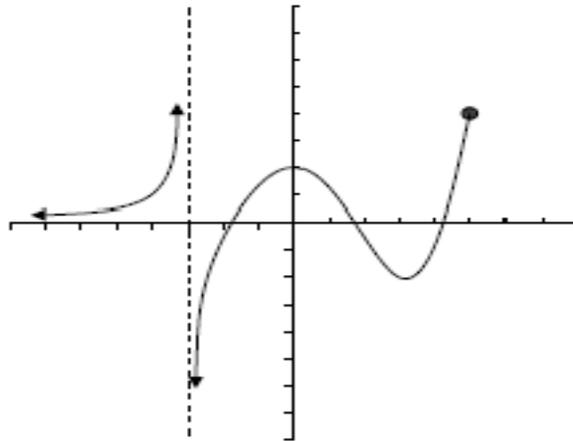
PRECÁLCULO

-Décimo Año-

II EXAMEN PARCIAL 2014

Nombre: _____ código: _____

Colegio: _____



Fórmula

1

Sábado 21 de junio de 2014

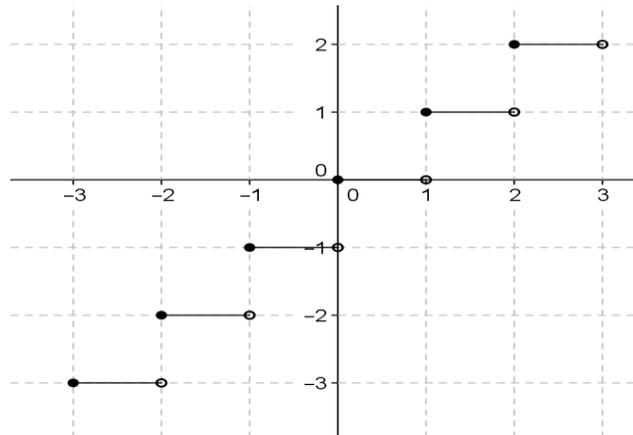
INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**
2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.
3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (30 puntos), la segunda es de repuesta breve (10 puntos) y la tercera es de desarrollo (20 puntos).
4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.
5. En el desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.
6. **En los ítems de selección, deberá rellenar con lápiz, en la hoja de respuestas, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**
7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente tinta indeleble.
8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.
9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.
10. **Trabaje con calma y le deseamos el mayor de los éxitos.**

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA (Valor 30 puntos)

Puede usar el espacio al lado de cada ítem para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.

1. Dada la gráfica de f



De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son verdaderas?

- I. $D_f = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- II. $A_f = [-3, 3]$
- III. 0 tiene solamente una imagen.

- (A) Sólo I
 - (B) Sólo III
 - (C) II y III
 - (D) I, II y III
2. Analice las siguientes relaciones :

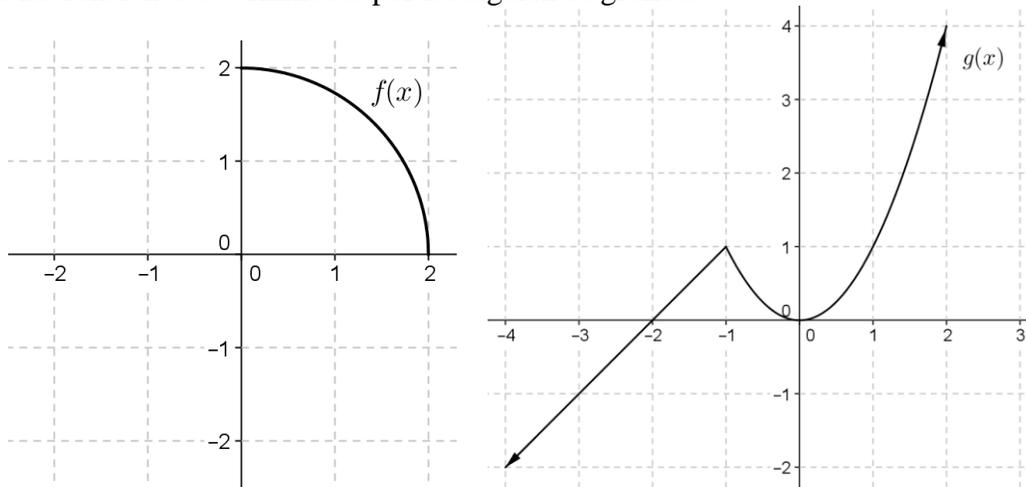
$$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad g(x) = |2x-1|$$

¿Cuáles de las relaciones anteriores son funciones?

- (A) Sólo f
- (B) Sólo g
- (C) Ambas
- (D) Ninguna

3. Analice las funciones determinadas por las siguientes gráficas:



¿Cuáles de las funciones anteriores son inyectivas?

- (A) Sólo f
 (B) Sólo g
 (C) Ambas
 (D) Ninguna
4. Considere la función $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = \sqrt{x}$, entonces la expresión $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ es equivalente a

- (A) $\frac{2x+h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$
 (B) $\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$
 (C) $\frac{2x+h}{h(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}$
 (D) $\frac{1}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}$

5. Considere una función cuyo criterio es $f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 + 1}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ -x^3 + x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

entonces $f(2) - \frac{f(-1)}{f(3)}$ es igual a

- (A) 2
- (B) $\frac{73}{36}$
- (C) $\frac{71}{36}$
- (D) $\frac{11}{6}$
6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = 2(x-k)^2 - 1$ donde k es un número real constante. Si $(k, k+1)$ pertenece al gráfico de la función f entonces un posible valor de k es igual a
- (A) -2
- (B) -1
- (C) 1
- (D) 2
7. El dominio máximo de la función f de criterio $f(x) = \frac{\sqrt{-x+1}}{x^2-1}$ corresponde a

- (A) $]-\infty, 1]$
- (B) $]-\infty, 1[$
- (C) $]-\infty, 1] - \{-1\}$
- (D) $]-\infty, 1[- \{-1\}$

8. Considere las siguientes funciones:

$$f :]3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x-3}$$

$$g : \mathbb{R} - \{5\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{2x}{x-5}$$

El dominio de la función $\frac{g}{f}$ corresponde a

- (A) $\mathbb{R} - \{5, 3\}$
 - (B) $]3, +\infty[- \{5\}$
 - (C) $]3, +\infty[- \{5\}$
 - (D) $]3, +\infty[- \{0, 5\}$
9. Considere la siguiente función $f : \mathbb{R} \rightarrow \{3\}, f(x) = 3$, entonces con certeza puede asegurarse que f NO es una función
- (A) lineal
 - (B) Constante
 - (C) inyectiva
 - (D) Sobreyectiva
10. Considere la función $f : A \rightarrow [-1, +\infty[$, con $f(x) = (x-a)^2 - 1, a \in \mathbb{R}$. Para que f sea biyectiva, el conjunto A puede ser
- (A) \mathbb{R}
 - (B) $]a, +\infty[$
 - (C) $] -\infty, a]$
 - (D) $] -1, a]$

11. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-1)^2 - 9$ entonces con certeza se cumple que:
- (A) f es creciente en el intervalo $[-1, +\infty[$
 - (B) f es decreciente en el intervalo $[1 + \infty[$
 - (C) la intersección con el eje Y es el punto $(-9, 0)$
 - (D) la gráfica de f interseca al eje X en dos puntos.
12. Considere las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = \frac{x-2}{x+4}$ definidas en su máximo dominio. El dominio de $g \circ f$ es igual a
- (A) $\mathbb{R} - \{-4\}$
 - (B) $\mathbb{R} - \{-2, 2, -4\}$
 - (C) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
 - (D) $\mathbb{R} - \{-2\}$
13. Si f es una función biyectiva de dominio $]-\infty, -3[$ tal que $f(x) = 1 - |x + 3|$, entonces el criterio de $f^{-1}(x)$ es igual a
- (A) $f^{-1}(x) = -x - 2$
 - (B) $f^{-1}(x) = x + 4$
 - (C) $f^{-1}(x) = x - 4$
 - (D) $f^{-1}(x) = x + 2$
14. Si f es biyectiva con criterio $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, entonces el criterio de f^{-1} corresponde a
- (A) $f^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x+1}$
 - (B) $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-1}$
 - (C) $f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-1}$
 - (D) $f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x+1}$

15. Si las ecuaciones $(-2k+3)x+3y=1$ y $3x-5y=0$ determinan dos rectas perpendiculares, entonces el valor de k es igual a
- (A) -4
(B) 4
(C) 1
(D) -1
16. Considere las funciones f y g definidas en su dominio máximo, tales que $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=x^2+2x+1$. Si $x \geq -1$ entonces $(f \circ g)(x)$ es igual a
- (A) $x+2\sqrt{x}+1$
(B) $-x-2\sqrt{x}-1$
(C) $-x-1$
(D) $x+1$
17. Si g es una función con ámbito $[-4, +\infty[$ y criterio $g(x) = -x + 2$, entonces su dominio es igual a
- (A) $[6, +\infty[$
(B) $] -\infty, 6]$
(C) $[-2, +\infty[$
(D) $] -\infty, -2]$
18. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es una función lineal tal que $(4, -2)$ y $(-4, 0)$ pertenecen al gráfico de f , entonces el criterio de f está dado por
- (A) $f(x) = 2x + 8$
(B) $f(x) = -2x + 8$
(C) $f(x) = \frac{-x-4}{4}$
(D) $f(x) = \frac{-x+4}{4}$

19. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-x-15}{5}$, entonces las intersecciones de la gráfica de f con los ejes están dadas por

- (A) $(-15,0)$ y $(0,-3)$
- (B) $(-3,0)$ y $(0,-3)$
- (C) $(-15,0)$ y $(0,-15)$
- (D) $(15,0)$ y $(0,15)$

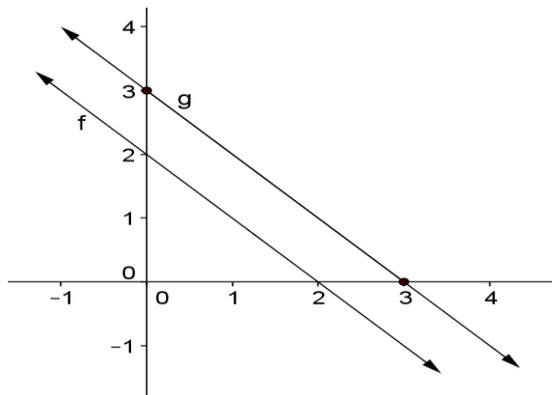
20. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (4-a^2)x+1$, $a \in \mathbb{R}$, es una función lineal decreciente, entonces el valor de a puede ser cualquier elemento del siguiente conjunto

- (A) $\{ \}$
- (B) $] -2, 2]$
- (C) $] -1, -2 [$
- (D) $] -\infty, -2 [\cup] 2, +\infty [$

21. Una ecuación que define la recta que pasa por $(3,-1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x-10y=1$ es igual a

- (A) $5y+x=14$
- (B) $16y-5x=1$
- (C) $y+5x=14$
- (D) $y+14x=1$

22. En la gráfica, las rectas f y g son paralelas. ¿Cuál es una ecuación para g ?



- (A) $y + x = 2$
- (B) $y - x = -2$
- (C) $y + x = 3$
- (D) $y - x = 3$

23. La abscisa del punto de intersección de dos rectas de ecuación $y = -2x + 3$ y $-x = 4y + 4$, es igual a

- (A) $\frac{-11}{7}$
- (B) $\frac{16}{7}$
- (C) $\frac{11}{7}$
- (D) $\frac{-72}{7}$

24. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática, con $a > 0$, cuyo vértice es $(0,1)$. De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son verdaderas?

I. $b^2 - 4ac = 0$

II. $f(-1) < f(1)$

- (A) Solo I
- (B) Sólo II
- (C) I y II
- (D) Ninguna

25. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 25 - x - (5 - x)^2$, entonces el conjunto solución de $f(x) < 0$ corresponde a

- (A) $[0,9]$
- (B) $]0,9[$
- (C) $]-\infty,0] \cup [9,+\infty[$
- (D) $]-\infty,0[\cup]9,+\infty[$

26. Si el vértice de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 4x + 3$ es $(-2,-1)$ entonces las preimágenes de 0 corresponden a

- (A) 3 y 1
- (B) -3 y -1
- (C) -1 y $\frac{-3}{2}$
- (D) 1 y $\frac{3}{2}$

27. Si la parábola de ecuación $y = (a + 4)x^2 - 3$ es cóncava hacia abajo, entonces el valor de "a" debe pertenecer al conjunto
- (A) $[3, 4]$
 - (B) $] -4, -3]$
 - (C) $[4, +\infty[$
 - (D) $] -\infty, -4[$
28. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - bx - 8$. Si el eje de simetría de la gráfica de f es $x = 1$ entonces la función es creciente en el intervalo
- (A) $] -\infty, 1[$
 - (B) $] 9, +\infty[$
 - (C) $] -\infty, -9[$
 - (D) $] -9, +\infty[$
29. Un objeto cae desde una ventana a 125 metros de altura. La altura h después de t segundos de iniciada la caída es $h(t) = -5t^2 + 125$. ¿Cuántos segundos tardará el objeto en llegar al suelo?
- (A) -5
 - (B) 3
 - (C) 5
 - (D) 10
30. Si la función de demanda para un producto es $p = 1000 - 2q$, donde p es el precio por unidad cuando q unidades son demandadas por los consumidores, entonces la cantidad demandada que produce el ingreso máximo es
- (A) 250
 - (B) 500
 - (C) 125000
 - (D) 375000



Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

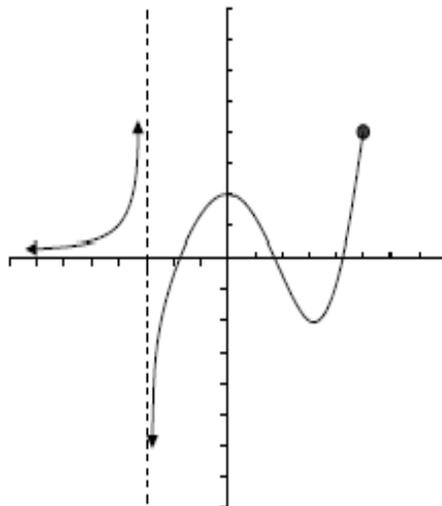


SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 2014 - Sábado 21 de junio

Nombre completo: _____ CÓDIGO: _____

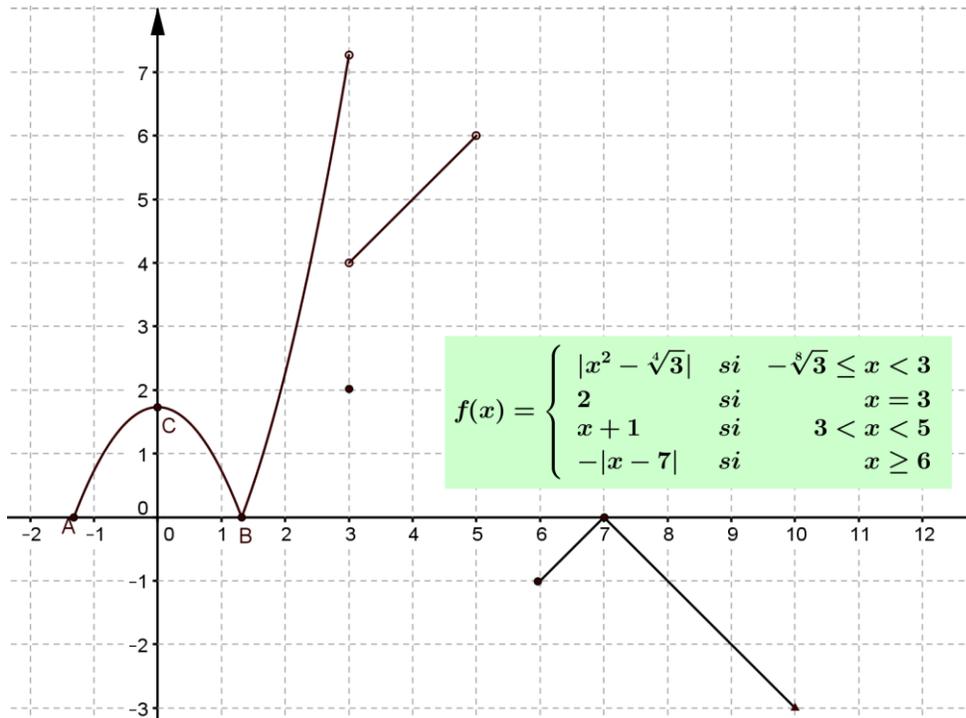
COLEGIO: _____

PREGUNTA	Puntos obtenidos
AG	
D1	
D2	
D3	
TOTAL	



SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA (Valor 10 puntos)

A continuación se le presenta la gráfica de una función f , escriba en el espacio indicado lo que se le solicita.



- El dominio de f es igual a _____
- El ámbito de f es igual a _____
- El conjunto solución de la inecuación $f(x) \geq 0$ corresponde a _____
- El conjunto solución de la inecuación $f(x) < 0$ corresponde a _____
- Un intervalo donde f es decreciente corresponde a _____
- Los valores de B y C corresponden **respectivamente** a _____ y _____
- La cantidad de preimágenes de 4 es igual a _____
- La imagen de 3 es igual a _____
- El resultado de $\frac{f(3) - f(4) \cdot f(8)}{f(0)}$ es igual a _____

TERCERA PARTE. DESARROLLO (Valor 20 puntos)

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los siguientes problemas, deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

1. Considere el $\triangle ABC$ cuyos vértices son los puntos $A(0,3r)$, $B(r,0)$ y $C(-r,0)$. Verifique que dos medianas son perpendiculares. (6 puntos)

$$M_1(A, B) = \left(\frac{r}{2}, \frac{3r}{2} \right)$$

$$m_{\overline{CM_1}} = \frac{\frac{3r}{2} - 0}{\frac{r}{2} + r} = \frac{\frac{3r}{2}}{\frac{r+2r}{2}} = 1$$

$$M_2(A, C) = \left(\frac{-r}{2}, \frac{3r}{2} \right)$$

$$m_{\overline{BM_2}} = \frac{\frac{3r}{2} - 0}{\frac{-r}{2} - r} = \frac{\frac{3r}{2}}{\frac{-r-2r}{2}} = -1$$

$$M_3(B, C) = (0, 0)$$

$$m_{\overline{AM_3}} \text{ indefinida } x = 0$$

Como $m_1 \cdot m_2 = -1$ entonces $\overline{CM_1} \perp \overline{BM_2}$

2. Considere los vértices $A(-1, k-1)$, $B(k, k+1)$, $C(3, 1)$ y $D(k-2, -1)$. Determine el valor de k para que el $\square ABCD$ sea un paralelogramo. Justifique. (4 puntos)

$$m_{\overline{AB}} = \frac{k+1 - k-1 - 0}{k+1} = \frac{2}{k+1}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{-1-1}{k-2-3} = \frac{-2}{k-5}$$

$$m_{\overline{AD}} = \frac{k-1+1}{-1-k+2} = \frac{k}{1-k}$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{k+1-1}{k-3} = \frac{k}{k-3}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{k+1} &= \frac{-2}{k-5} & \wedge & \quad \frac{k}{1-k} = \frac{k}{k-3} \\ 2k-10 &= -2k-2 & \wedge & \quad k^2-3k = k-k^2 \\ 4k &= 8 & \wedge & \quad 2k^2-4k = 0 \\ k &= 2 & \wedge & \quad 2k(k-2) = 0 \\ k &= 2 & \wedge & \quad (k=0 \vee k=2) \\ \therefore k &= 2 \end{aligned}$$

3. Dadas las funciones $f : [-1, +\infty[\rightarrow]-\infty, 6]$ con $f(x) = 6 - (x+1)^2$ y $g : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = x+1$:

- a) Determine la función inversa de f y determine $(g \circ f^{-1})(2)$ (5 puntos)

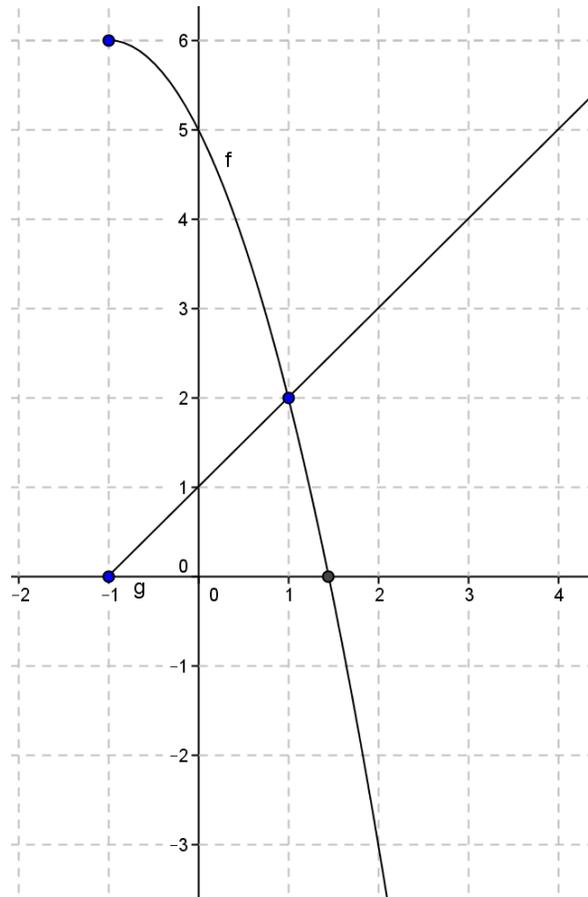
Como $f : [-1, +\infty[\rightarrow]-\infty, 6]$ entonces $f^{-1} :]-\infty, 6] \rightarrow [-1, +\infty[$, por lo tanto $f^{-1}(x) \in [-1, +\infty[$ y se debe cumplir que

$$\begin{aligned} x &= 6 - (f^{-1}(x) + 1)^2 \\ (f^{-1}(x) + 1)^2 &= 6 - x \\ |f^{-1}(x) + 1| &= \sqrt{6-x} \\ f^{-1}(x) + 1 &= \sqrt{6-x} \quad \vee \quad f^{-1}(x) + 1 = -\sqrt{6-x} \\ f^{-1}(x) &= -1 + \sqrt{6-x} \quad \vee \quad f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{6-x} \end{aligned}$$

Como $f^{-1}(x) \geq -1$ se tiene que $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{6-x}$

Por lo tanto $(g \circ f^{-1})(2) = g(f^{-1}(2)) = g(1) = 2$

- b) Trace las gráficas de f y g en el plano cartesiano que se le proporciona, indicando las intersecciones con los ejes. (5 puntos)



SOLUCIÓN I PARTE: Selección única

1	B	8	C	15	D	22	C	29	C
2	D	9	C	16	D	23	B	30	A
3	A	10	C	17	B	24	D		
4	B	11	B	18	C	25	D		
5	A	12	C	19	A	26	B		
6	A	13	C	20	D	27	D		
7	D	14	B	21	C	28	B		

SOLUCIÓN SEGUNDA PARTE. ANÁLISIS DE GRÁFICA

- a) El dominio de f es igual a $[-\sqrt[8]{3}, 5[\cup [6, +\infty[$
- b) El ámbito de f es igual a $]-\infty, 9 - \sqrt[4]{3}[$
- c) El conjunto solución de la inecuación $f(x) \geq 0$ corresponde a $[-\sqrt[8]{3}, 5[\cup \{7\}$
- d) El conjunto solución de la inecuación $f(x) < 0$ corresponde a $[6, +\infty[- \{7\}$
- e) Un intervalo donde f es decreciente corresponde a $[0, 1]$, $[7, +\infty[$ o cualquier subconjunto de ellos
- f) Los valores de B y C corresponden **respectivamente** a $\sqrt[8]{3}$ y $\sqrt[4]{3}$
- g) La cantidad de preimágenes de 4 es igual a 1
- h) La imagen de 3 es igual a 2
- i) El resultado de $\frac{f(3) - f(4) \cdot f(8)}{f(0)}$ es igual a $\frac{2 - 5 \cdot -1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{7}{\sqrt[4]{3}} = \frac{7\sqrt[4]{27}}{3}$