Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

II EXAMEN PARCIAL 2015

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

Nombre: ______________________________ código: ______

Colegio: ____

Fórmula 1

Sábado 20 de junio de 2015

INSTRUCCIONES

1. **El tiempo máximo para resolver este examen es de 3 horas.**

2. Lea cuidadosamente, cada instrucción y cada pregunta, antes de contestar.

3. Este examen consta de tres partes. La primera de ellas es de selección única (28 puntos), la segunda de respuesta breve (9 puntos) y la tercera de desarrollo (20 puntos).

4. La parte de selección debe ser contestada en la hoja de respuestas que se le dará para tal efecto.

5. En la parte de desarrollo debe escribir, en el espacio indicado, su nombre, código y el nombre del colegio en el cual usted está matriculado. En caso de no hacerlo, usted asume la responsabilidad sobre los problemas que se pudieran suscitar por esta causa.

6. **En los ítems de selección**, usted deberá rellenar con lápiz, **en la hoja de respuestas**, la celda que contiene la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Si lo desea, puede usar el espacio al lado de cada ítem del folleto de examen para escribir cualquier anotación que le ayude a encontrar la respuesta. Sin embargo, **sólo se calificarán las respuestas seleccionadas y marcadas en la hoja para respuestas.**

7. **En los ítems de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada uno de ellos. Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra.

8. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **pregunta** está **desordenada**, ésta, **no se calificará**.

9. Recuerde que la calculadora que puede utilizar es aquella que contiene únicamente las operaciones básicas.

10. Trabaje con calma. Le deseamos el mayor de los éxitos.

PRIMERA PARTE. SELECCIÓN ÚNICA **(Valor 28 puntos)**

1. Una solución de $\frac{x+\sqrt{3}}{-2} < -2$ es

A) $-\sqrt{3}+4$

B) $-\sqrt{3}-4$

C) $\sqrt{3}-4$

D) $\sqrt{3}+4$

2. El conjunto solución de $\left(x^2-2x\right)^2-2\left(x^2-2x\right)-3 \geq 0$ es

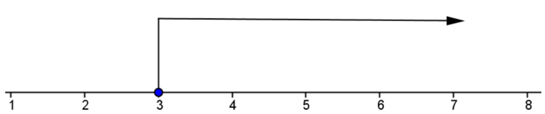
A) $[-1,3]$

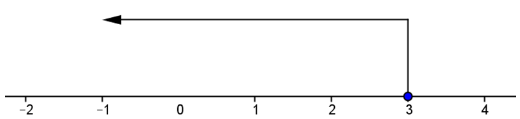
B) $]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[$

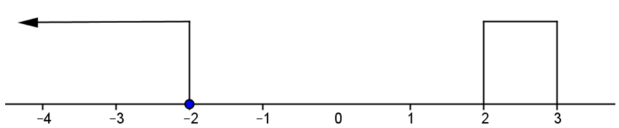
C) $]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$

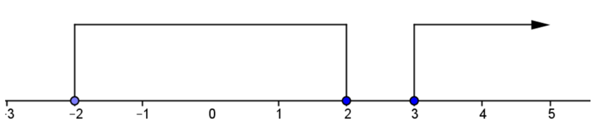
D) $]-\infty,-1] \cup [3,+\infty[\cup \{1\}$

3. Una representación gráfica del conjunto solución de $x(-x^2-4) \leq 3(-x^2-4)$ es

A) 

B) 

C) 

D) 

4. Considere la siguiente tabla de signos

$-\infty \qquad -3 \qquad \frac{1}{2} \qquad 2 \qquad 3 \qquad +\infty$

$(x+3)^2$	+	+	+	+	+
$q(x)$	-	-	+	+	+
$r(x)$	+	+	+	+	-
$x-2$	-	-	-	+	+
$p(x)$					

Analice las siguientes afirmaciones de acuerdo con la información de la tabla anterior y considerando que $p(x) = (x+3)^2 q(x) r(x)(x-2)$ donde $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios:

I. $p(-1) > 0$

II. $r(3) = p(-3)$

III. $q(0)\,r(0) > 0$

De las anteriores proposiciones son verdaderas solamente

A) I

B) I y II

C) I y III

D) II y III

5. El conjunto solución de $\frac{x}{x+1} \geq 1$ corresponde a

A) $IR - \{-1\}$

B) $]-\infty, -1[$

C) $]-1, +\infty[$

D) $]-\infty,-1[\, \cup \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

6. Considere las siguientes inecuaciones:

I. $|2 - x| \geq 2$

II. $|2 + x| < 2$

III. $|-2 + x| > -2$

¿Cuáles de ellas tienen soluciones reales?

A) Solamente II y III

B) Solamente I y III

C) Solamente I y II

D) I, II y III

7. El conjunto solución de $2 - |x| \leq 2$ es

A) $\emptyset$

B) $\mathbb{R}$

C) $\{0\}$

D) $\mathbb{R} - \{0\}$

8. El conjunto solución de $\left|3 - \frac{x}{2}\right| \leq 4$ es

A) $[-2,14]$

B) $[-14,2]$

C) $]-\infty, -14] \cup [2, +\infty[$

D) $]-\infty, -2] \cup [14, +\infty[$

9. Considere el siguiente enunciado:

«El volumen V de una esfera de radio r está dada por $V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$».

De acuerdo con el enunciado anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. r es la variable independiente

II. $V(2r) = 2 \cdot V(r)$

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

10. Considere el punto $P(-2,3)$ y la parábola de ecuación $y = x^2$. Si $d(x)$ denota la distancia del punto P a un punto $Q(x, y)$ cualquiera de la parábola en función de su abscisa entonces $d(x)$ es igual a

A) $\sqrt{\frac{x-2}{2} + \frac{x^2+3}{2}}$

B) $\sqrt{\frac{x+2}{2} + \frac{x^2-3}{2}}$

C) $\sqrt{(x-2)^2 + (x^2+3)^2}$

D) $\sqrt{(x+2)^2 + (x^2-3)^2}$

11. Considere las siguientes relaciones:

I. $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = x^2 - 2015$

II. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ con $f(x) = x + 2015$

De ellas, ¿cuáles corresponden a una función?

A) Ambas

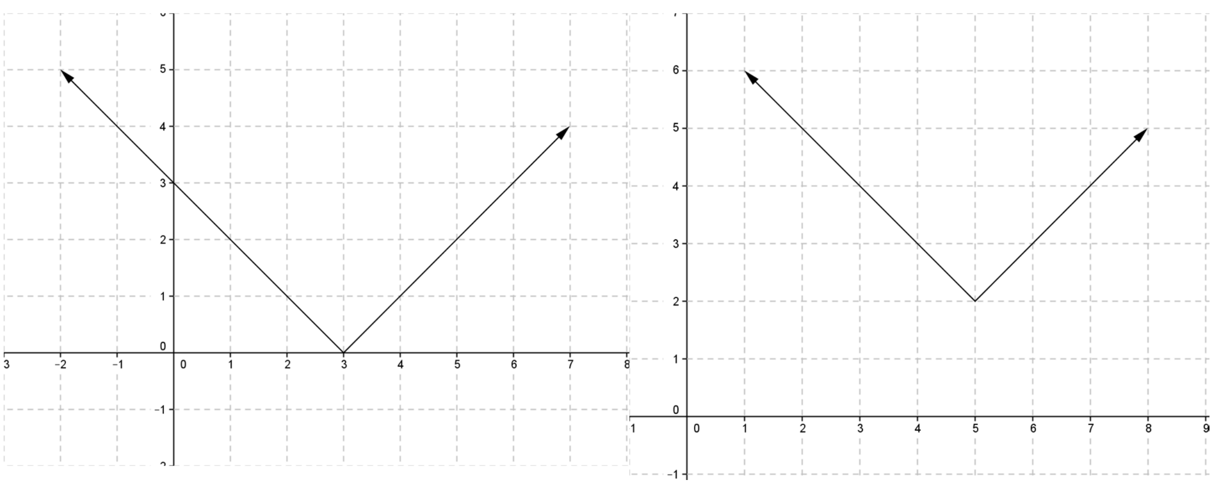
B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

12. Si f y g son funciones tal que sus gráficas son las de la figura:

$y = f(x)$ $y = g(x)$



Entonces se puede asegurar con certeza que $g(x) =$

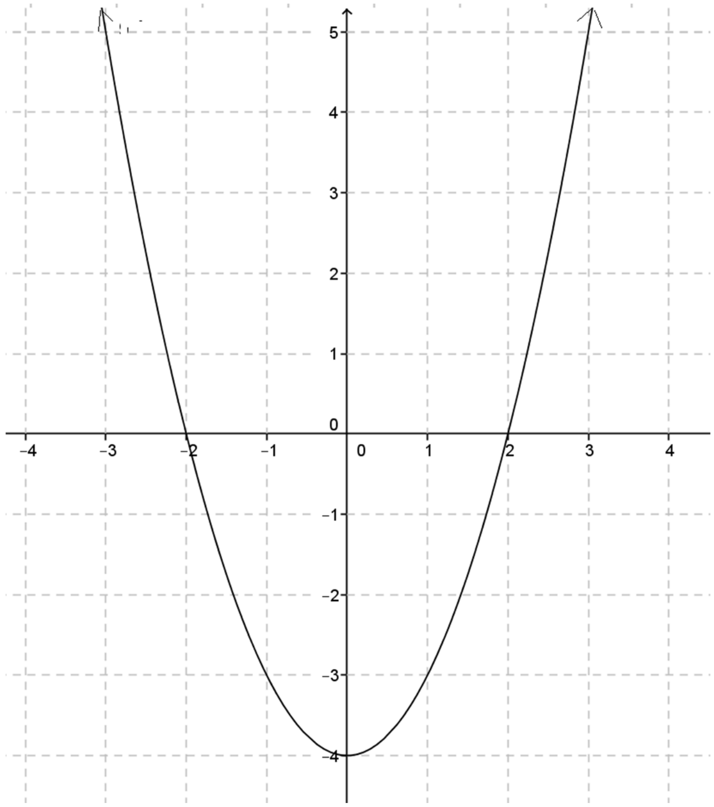
A) $f(x-2)+2$

B) $f(x+2)-2$

C) $f(x-5)-2$

D) $f(x+2)+2$

13. Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función tal que su gráfica es la siguiente, entonces el rango de la función $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ determinada por $h(x) = -g(x) + 1$ corresponde a



A) $]-\infty, 5]$

B) $]-\infty, 3]$

C) $[-4, +\infty[$

D) $[-3, +\infty[$

14. Si f es una función decreciente en el intervalo $]-2,3[$ entonces se puede asegurar con certeza que

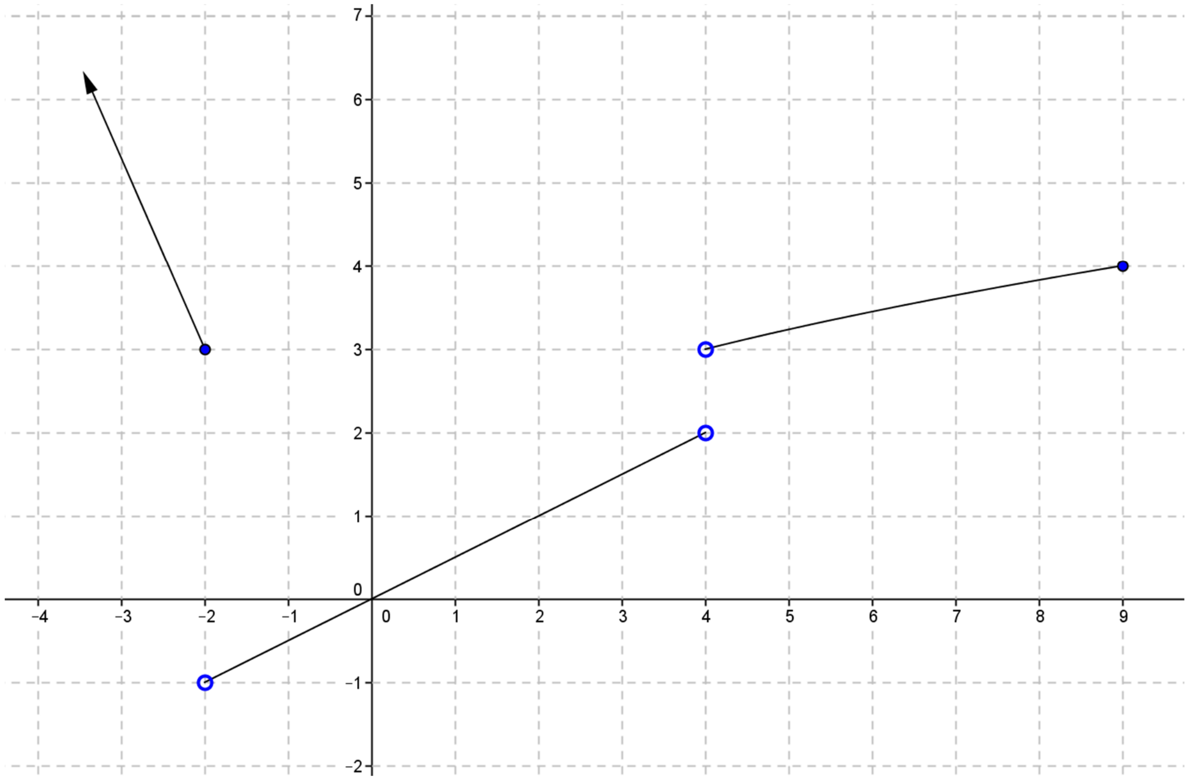
A) $f(-2) \leq f(3)$

B) $f(-1) \leq f(2)$

C) $f(-1) \geq f(2)$

D) $f(-2) \geq f(3)$

Para responder los ítems 15 y 16 refiérase a la siguiente gráfica de la función g:



15. Si c es un número tal que $g(0) + g(-2) - g(c) > 3$ entonces un posible valor de c corresponde a

A) -3

B) -1

C) 2

D) 9

16. Si a es un número real en el ámbito de g tal que tiene **dos preimágenes**, entonces con certeza se puede asegurar que a pertenece al siguiente intervalo

A) $]3,4[$

B) $]3,4]$

C) $\left]\frac{7}{2},4\right]$

D) $\left]3,\frac{7}{2}\right[$

17. Considere dos números reales a y b, un intervalo B y una función $f\colon [a,b] \to B$ tal que $f(a) = f(b)$, analice las siguientes afirmaciones:

I. f *NO* es inyectiva

II. f es constante

Se puede asegurar con certeza que son verdaderas

A) ambas

B) ninguna

C) solamente I

D) solamente II

18. El dominio máximo de una función cuyo criterio es $f(x) = \sqrt{2+x} + \sqrt{2x-6}$

A) $\left[-2,\ 3\right]$

B) $\left]-\infty,+\infty\right[$

C) $\left[\ 3,+\infty\ \right[$

D) $\left]-\infty,-2\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

19. Si $g\colon \{a,b,c,d,e,f\} \to \{1,2,3,4\}$ es una función sobreyectiva entonces se puede asegurar con certeza que existen

A) exactamente tres preimágenes con la misma imagen

B) exactamente tres imágenes con la misma preimagen

C) al menos dos imágenes con la misma preimagen

D) al menos dos preimágenes con la misma imagen

20. Si $f:]-\infty, 2] \cup]3,5[\rightarrow \mathbb{R}$ y $g:]-2,2] \cup [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ son funciones entonces el dominio de la función $f - g$ corresponde a

A) $]-2,2] \cup]3,5[$

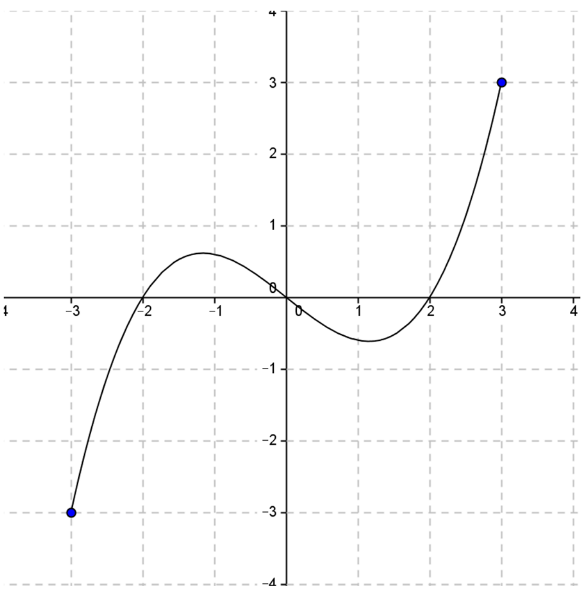
B) $]-2,2] \cup [3,5[$

C) $]-\infty, 2] \cup]3, +\infty[$

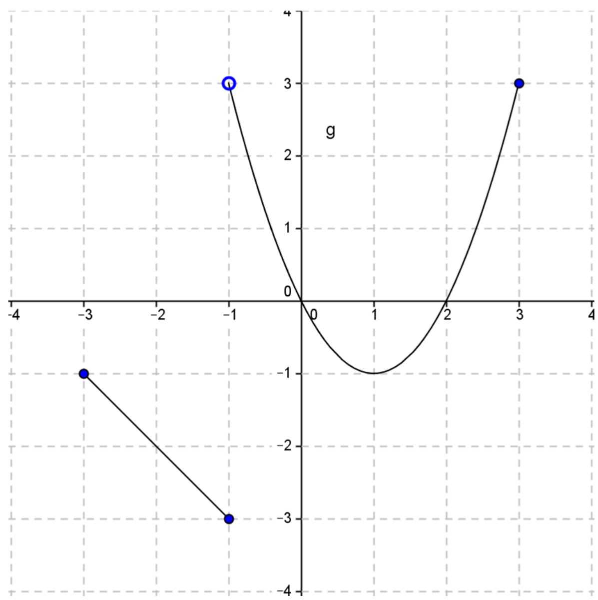
D) $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

21. Considere las funciones $f: [-3,3] \rightarrow [-3,3]$ y $g: [-3,3] \rightarrow [-3,3]$ cuyas gráficas son las siguientes:

$y = f(x)$



$y = g(x)$



El resultado de $(g\ o\ f)(2) - f\big(g(-1)\big)$ corresponde a

A) 0

B) 3

C) -3

D) -5

22. La gráfica de una función g es una recta cuya pendiente es -2 y que contiene al punto de coordenadas (r, k). Se puede asegurar con certeza que $g(r-2) =$

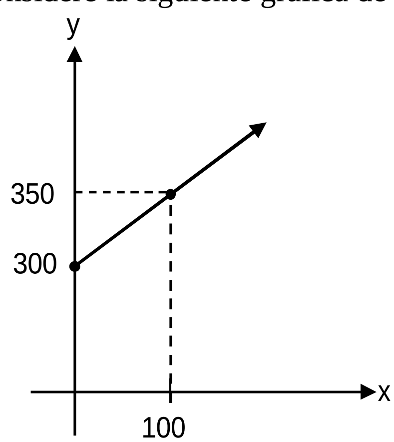
A) $k-2$

B) $k-4$

C) $k+2$

D) $k+4$

23. Considere la siguiente gráfica de una función lineal C:



De acuerdo con los datos de la gráfica anterior, donde $y = C(x)$ representa el costo, en miles de colones, de procesar x kilogramos de un determinado producto en un día. ¿Cuál es el costo, en colones, de procesar 400 kg de ese producto en un día?

A) 400 000

B) 500 000

C) 550 000

D) 650 000

24. El salario S de un trabajador está en función de la cantidad de horas completas laboradas h. Al día, el operario recibe ¢5000 más un adicional de ¢1500 por cada hora trabajada. Considere las siguientes proposiciones:

I. El salario diario del operario en función de las horas trabajadas, está dada por $S(h) = 6500h$.

II. Para obtener un salario diario mayor que ¢14 000 el operario debe trabajar más de 6 horas.

De ellas, ¿cuáles son verdaderas?

A) Ambas

B) Ninguna

C) Solo la I

D) Solo la II

25. Si a es un número real, considere la función definida en su dominio máximo por $f(x) = (a^2 - 4)x^2 + (a - 2)x + a$ y analice las siguientes afirmaciones:

I. Si $a = 2$ entonces la gráfica de f es una recta horizontal.

II. Si $a = -2$ entonces la gráfica de f es una recta decreciente.

III. Si $a = 0$ entonces la gráfica de f es una parábola cóncava hacia abajo.

De ellas son verdaderas

A) I, II y III

B) únicamente I y II

C) únicamente I y III

D) únicamente II y III

26. Sea $f\colon [-2,1[\to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = (x+1)^2 - 3$. El ámbito de f corresponde a

A) $[-3, +\infty[$

B) $[-3, -2]$

C) $[-2,1[$

D) $[-3,1[$

27. La función definida en su dominio máximo por $h(x) = -6x^2 - x + 3$ es creciente en el intervalo

A) $\left]-\infty, \frac{71}{24}\right[$

B) $\left]-\infty, -\frac{1}{12}\right[$

C) $\left]-\frac{1}{12}, +\infty\right[$

D) $\left]-\frac{73}{24}, +\infty\right[$

28. Si $f\colon A \to [0,4]$ es una función biyectiva tal que $f(x) = x^2$ entonces A puede ser el siguiente conjunto

A) $[-2,2]$

B) $[-2,1]$

C) $[-1,0] \cup [1,2]$

D) $[-2,-1] \cup [0,1[$

Fin de la primera parte

Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

II EXAMEN PARCIAL 2015

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

NOMBRE COMPLETO: ____

COLEGIO: ____

CÓDIGO: __________________________

	Valor	Puntos obtenidos
II Parte	**9 puntos**	
#1 de desarrollo	5 puntos	
#2 de desarrollo	5 puntos	
#3 de desarrollo	5 puntos	
#4 de desarrollo	5 puntos	
III Parte	**20 puntos**	

SEGUNDA PARTE. RESPUESTA BREVE **(Valor 9 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios y escriba la respuesta en el espacio correspondiente.

1. Para cada una de las siguientes inecuaciones escriba, en el espacio indicado, el conjunto solución de:

a. $x^2 + x + 1 < 0$ ____________________

b. $x(x^2 + 1) < 0$ ____________________

c. $|5 - 2x| > -3$ ____________________

2. Indique los puntos de intersección de los ejes del sistema de coordenadas con la gráfica de la función $f\colon]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{-x^2+1}{3}$:

_________________ _________________

3. Indique el dominio máximo de la función cuyo criterio es $g(x) = \frac{5}{(x-2)^{-1}}$

____

4. Considere dos funciones cuyos criterios están dados por $f(x) = \sqrt{x} + x$ y $f\big(g(x)\big) = x^2 + x^4$. Indique el criterio de la función g.

$g(x) =$_________________

5. Si el rango de la función $f\colon D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5 - x$ es el conjunto $A =]0,3]$, indique el conjunto correspondiente al dominio:

$D =$_________________

6. Indique el ámbito de una función cuya gráfica es una parábola cóncava hacia arriba si su vértice es el punto de coordenadas $(-2,4)$:

____

TERCERA PARTE. DESARROLLO **(Valor 20 puntos)**

Resuelva en forma clara y ordenada cada uno de los ejercicios que se le plantean a continuación. Deben aparecer todos los procedimientos realizados para llegar a la respuesta.

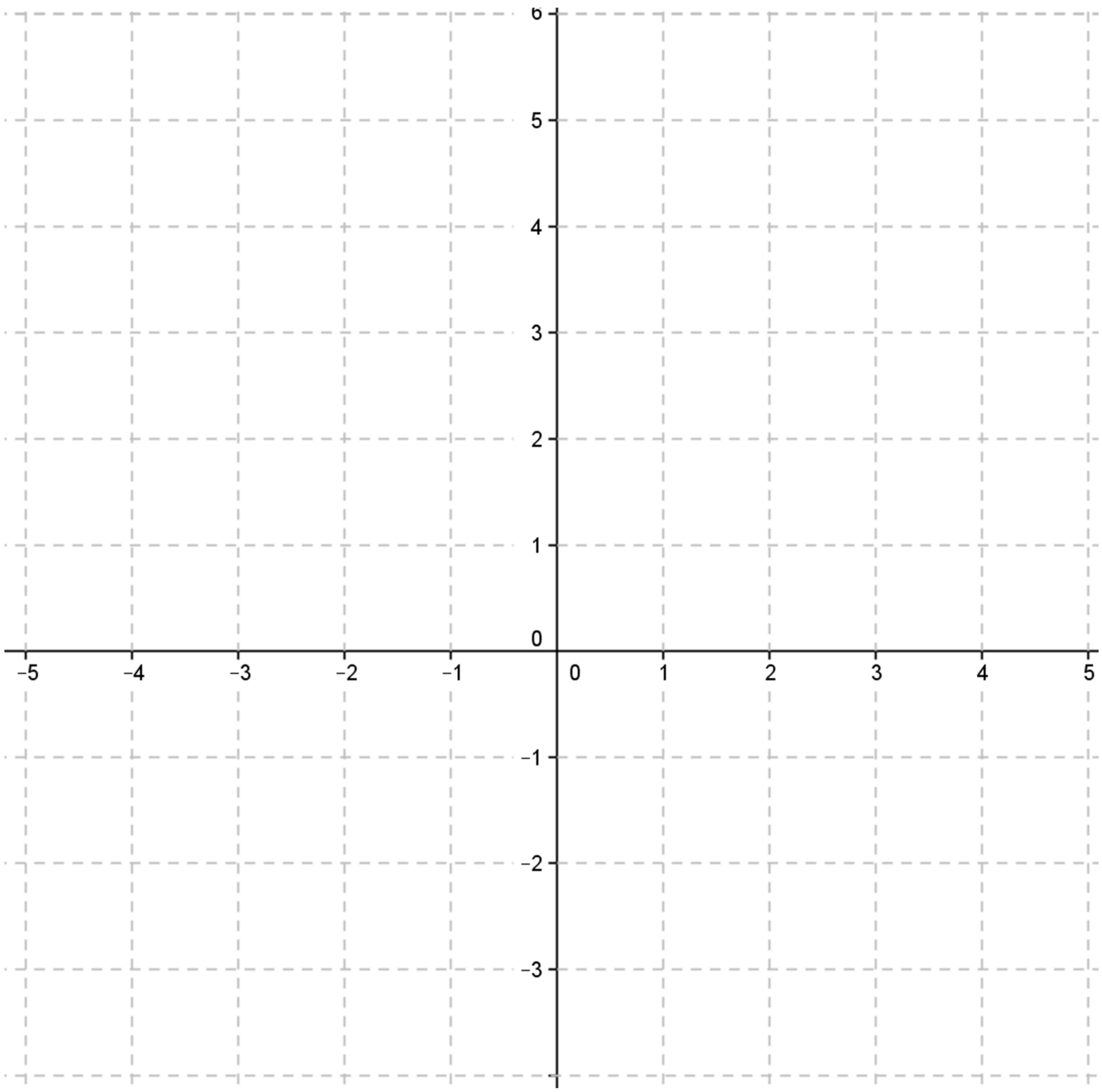
1. Determine el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de la siguiente inecuación:

$$\frac{6x}{(x-3)(x-1)} - \frac{1}{2(3-x)} \geq 0$$

2. Determine el dominio máximo D de la función $g\colon D \to \mathbb{R}$ definida por el siguiente criterio:

$$g(x) = \frac{x}{2-\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x(4-x)}.$$

3. Trace la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 1 \\ 4 - x & si\ x > 1 \end{cases}$.



4. Si en un terreno se siembran x árboles por hectárea, la producción de manzanas de cada uno de ellos está dada por $(500 - 5x)\ Kg$. Si el terreno mide 5 hectáreas, determine la cantidad de árboles que se deben sembrar para que la producción total por hectárea sea máxima.

Fin de la segunda parte