Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

I EXAMEN PARCIAL 2015

PRECÁLCULO

-Décimo Año-

SOLUCIÓN PRIMERA PARTE. SELECCIÓN (Valor 27 puntos)

1	C	**4**	B	**7**	D	**10**	C	**13**	B	**16**	D	**19**	C	**22**	D	**25**	C
2	D	**5**	D	**8**	A	**11**	B	**14**	C	**17**	B	**20**	B	**23**	A	**26**	D
3	A	**6**	D	**9**	C	**12**	C	**15**	B	**18**	D	**21**	C	**24**	A	**27**	B

SOLUCIÓN· SEGUNDA PARTE. DESARROLLO (Valor 23 puntos)

1. (3 puntos) Racionalice el numerador de la siguiente fracción y simplifique al máximo el resultado.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+h}}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}}{\sqrt{a}+\sqrt{a+h}} =$$

$$= \frac{(a-(a+h))}{h\sqrt{a}\sqrt{a+h}(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})} =$$

$$\frac{-h}{ha\sqrt{a+h} \;+\; h(a+h)\sqrt{a}} =$$

$$\frac{-1}{a\sqrt{a+h} \;+\; (a+h)\sqrt{a}}$$

2. (7 puntos) Determine el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$(\sqrt{x+\sqrt{2-x}})(\frac{x}{3-x}-x)$=0 $\qquad\qquad x \neq 3$

$\sqrt{x+\sqrt{2-x}}=0$ y $\frac{x}{3-x}-x=0$

$x+\sqrt{2-x} = 0$ $\qquad \frac{x-x(3-x)}{3-x}=0$

$\sqrt{2-x}$ = - x $\qquad x-3x+x^2=0$

$2-x=x^2$ $\qquad x^2-2x=0$

$x^2+x-2=0$ $\qquad x(x-2)=0$

$(x+2)(x-1)=0$ $\qquad x=0 \quad x=2$

$x=-2 \;\vee\; x=1 \quad x=1$ no es solución de la ecuación,

Probar las soluciones.

$$S = \{-2,0,2\}$$

3. (7 puntos) Considere la curva de ecuación $y = x^2 - 2x - 17$. Escriba la ecuación de la forma $y = a(x-h)^2 + k$ e indique la concavidad, intersecciones con los ejes, eje de simetría y vértice de la parábola.

$$y = x^2 - 2x - 17$$

$$y = x^2 - 2x + 1 - 17 - 1$$

$$y = (x-1)^2 - 18$$

Concavidad: Cóncava hacia arriba pues $a = 1 > 0$.

Vértice: (1, -18).

Intersección con el eje y: (0, - 17).

Intersecciones con el eje x: $\left(1+3\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(1-3\sqrt{2}, 0\right)$.

$$(x-1)^2 = 18 \Rightarrow x - 1 = 3\sqrt{2}\ o\ x - 1 = -3\sqrt{2} \Rightarrow x = 3\sqrt{2} + 1\ o\ x = -3\sqrt{2} + 1$$

4. (6 puntos) Determine la posición relativa (concéntricas, secantes, interiores, exteriores, tangentes interiores o tangentes exteriores) de las circunferencias determinadas por las siguientes ecuaciones: $x^2 + 6x + y^2 = -8$ y $x^2 + y^2 = 4$

Ecuación	$x^2 + 6x + y^2 = -8$ $x^2 + 6x + 9 + y^2 = -8 + 9$ $(x + 3)^2 + y^2 = 1$	$x^2 + y^2 = 4$
Centro	$C(-3,0)$	$D(0,0)$
Radio	1	2
Distancia entre los centros	$d(C, D) = \sqrt{0 + (-3)^3} = 3$	

La suma de los radios es igual a la distancia de centro a centro. Por lo tanto son tangentes exteriores.

También se puede resolver mediante un sistema de ecuaciones:

$$x^2 + 6x + y^2 = -8 \leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = -8 + 9 \leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ (x + 3)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4 - x^2 \\ y^2 = 1 - (x + 3)^2 \end{cases}$$

$$4 - x^2 = 1 - (x + 3)^2$$

$$4 - x^2 = 1 - x^2 - 6x - 9$$

$$12 = -6x$$

$$-2 = x$$

$$y^2 = 4 - (-2)^2 = 0$$

Como la solución del sistema de ecuaciones es única entonces las circunferencias son tangentes. El punto de tangencia es $(-2,0)$, los centros son $(-3,0)$ y $(0,0)$, por lo tanto las circunferencias son tangentes exteriores (el punto de tangencia está entre los centros).