Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Matemática para la Enseñanza Media

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Sesión Virtual 3:
LÍMITES Y CONTINUIDAD

Contenidos

- Límites de funciones trigonométricas.
- Teorema de intercalación.
- Continuidad.

Límites trigonométricos

Casos a considerar

Las estrategias para el cálculo de límites que involucren funciones trigonométricas se pueden resumir en el uso de:

- identidades trigonométricas,
- límites trigonométricos especiales (incluye sustituciones),
- sustituciones (modificación del argumento de la razón trigonométrica).
- teorema de intercalación.

Nota: los límites trigonométricos se trabajan en radianes.

Algunas identidades trigonométricas

1. **Identidades Pitagóricas:**

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$$

$$1+\tan^2(\alpha)=\sec^2(\alpha)$$

$$\cot^2(\alpha)+1=\csc^2(\alpha)$$

2. **Identidades de Ángulos dobles:**

$$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)$$

3. **Ángulos Complementarios:**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot(\alpha)$$

4. **Paridad e imparidad:**

$$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha)=\cos(\alpha)$$

$$\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$$

5. **Identidades Recíprocas:**

$$\csc(\alpha)=\frac{1}{\sin(\alpha)}$$

$$\sec(\alpha)=\frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha)=\frac{1}{\tan(\alpha)}=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

6. **Suma y Resta de Ángulos:**

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Límites trigonométricos y teorema de intercalación

Límites especiales

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

Nota: Hay otros límites que, al usar sustituciones, toman la forma de los límites trigonométricos especiales.

Teorema de intercalación

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, para todo x en un intervalo abierto que contiene a c, excepto quizás en el propio c, y si se cumple que $\lim\limits_{x\to c} h(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ entonces: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$.

Nota: También aplica para límites al infinito,así como también para criterios que no necesariamente involucran razones trigonométricas (normalmente seno y coseno).

Observación:En muchos ejercicios solamente se conoce el criterio de $f(x)$, cuyo cálculo no es sencillo, por lo que se recurre a "construir" los criterios de $h(x)$ y $g(x)$ que cumplan la desigualdad mencionada para calcular los límites de estas dos funciones.
En otros ejercicios (minoría), sabiendo que se cuple la desigualdad y que se conocen solamente los criterios de $h(x)$ y $g(x)$ pero no el criterio de $f(x)$ (el cual solicitan calcular), se procede a calcular los límites de los criterios conocidos

Continuidad

Noción de continuidad

La continuidad de una función en un intervalo puede ejemplifcarse como un trazo con un lápiz, sin levantarlo, de la gráfica de dicha función. De manera informal entonces es que la gráfica no tenga rupturas, huecos o saltos.

Se trabajará principalmente la contiudad puntual, cuya concepción se extiende hasta continuidad de una función dentro de intervalos del dominio, es decir, todos los valores de x que pertenezcan al intervalo deben de cumplir con la definición de continuidad puntual.

La continuidad de las funciones polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas está relacionada con su dominio máximo, respectivamente.

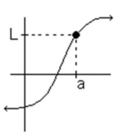
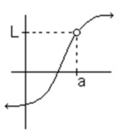
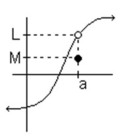
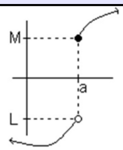
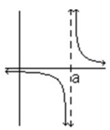
Continuidad puntual

Se dice que una función f es **continua** en $x = a$ si

a) $f(a)$ existe; b) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe; c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Visto de otra forma: f es continua en $x = a$ si y solo si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

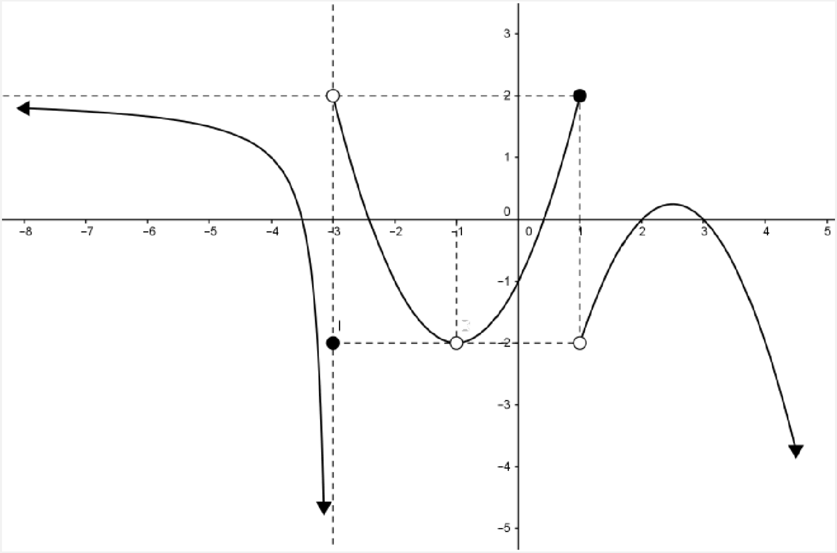
En caso de que alguno de los tres requisitos de la definición de continuidad se incumpla, se dice que la función f es **discontinua** en $x = a$.

				
$f(a) = L$ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$	$f(a)$ **no existe** $\lim_{x \to a} f(x) = L$	$f(a) = M$ $\lim_{x \to a} f(x) = L$ $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$	$f(a) = M$ $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$	$f(a)$ **no existe** $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$
f **es continua en** $x = a$	f **es discontinua en** $x = a$	f **es discontinua en** $x = a$	f **es discontinua en** $x = a$	f **es discontinua en** $x = a$
	Discontinuidad Evitable		**Discontinuidad Inevitable**	

Tipo: Respuesta Breve

Ejemplo 1

La siguientes figura corresponde a la gráfica de la función f. Conteste en su cuaderno de examen lo que se le solicita.



1. ¿Cuál es un valor del dominio donde existe una discontinuidad evitable?

2. ¿Cuál es un valor del dominio donde existe una discontinuidad inevitable?

Tipo Selección Unica

Ejemplo 2. Parcial 2015

Sea f una función definida en su máximo dominio, tal que $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{x^4 - 16}$.
Considere las siguientes afirmaciones:

I. f posee una discontinuidad evitable en $x = -2$.

II. f posee una discontinuidad inevitable en $x = -4$.

III. $y = 0$ es la ecuación de una asíntota horizontal de la gráfica de f.

De ellas, con certeza, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

A. Solamente II y III

B. Solamente I y III

C. Solamente III

D. Solamente I

Tipo Desarrollo

Ejemplo 3

Calcule, si existen, los siguientes límites

.

- (Parcial 2017) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(3x)}{1 - 2\cos(x)}$

- (Parcial 2018) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{\cos(2x)}$

Tipo Desarrollo

.

- (Parcial 2019) $\lim_{x \to 1} \left[(x-1)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} \right) \right]$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$

Ejemplo 4. Parcial 2017

Considere la función h definida en su máximo dominio, tal que:

$$h(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que h es continua en $x = 0$.

.

Ejemplo 5. Parcial 2019

Considere la función f definida en su máximo dominio, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax}{x-2} & si \quad x < 1 \\ 3 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{bx^2}{x^2+3} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Determine el valor de los parámetros a y b para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$.

.