# Formas indeterminadas y la regla de L`Hôpital

En secciones anteriores se calcularon límites de algunas formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ y $\infty-\infty$, recurriendo a procesos algebraicos de factorización y racionalización.

Por ejemplo, al calcular el límite $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x-3}$ se encuentra una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ :

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{3}=\frac{2}{3}$$

Cuando se calculan límites de funciones trascendentes (trigonométricas, exponenciales y logarítmicas), en algunos casos también se pueden utilizar estas técnicas. Por ejemplo, al calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ también se debe trabajar con una forma indeterminada $\frac{0}{0}$, y se puede hacer de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\left(e^{\frac{1}{x}}+1\right)}{e^{\frac{1}{x}}-1}=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{2}{x}}+1\right)=1+1=2$$

Sin embargo, no todas las indeterminaciones se pueden resolver mediante este tipo de manipulaciones algebraicas, sobre todo si se involucran tanto funciones algebraicas como trascendentes.

Ejemplo $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}$, es una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ y no se puede resolver mediante manipulaciones algebraicas.

Para resolver este tipo de límites se aplicará el teorema conocido como la *Regla de L`Hôpital*, el cual se puede enunciar de la siguiente manera:

Sea I un intervalo abierto que contiene al número c. Si $f$ y $g$ son funciones derivables I, excepto tal vez en el mismo número $c$ y el límite $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ produce una de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ siempre y cuando este último límite exista (o sea infinito).

La regla de L´Hôpital también es válida para límites inilaterales, es decir, si en lugar de $x \to a$ se tiene $x \to a^+$, o bien $x \to a^-$. Este resultado también es cierto si el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ produce una de las formas indeterminadas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ si este último existe o es infinito.

En el caso en que $f(c) = g(c) = 0$, las derivadas de $f$ y $g$ son continuas y además $g'(c) \neq 0$, es fácil verificar que el teorema es cierto, de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \lim_{x\to c}\frac{\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\lim\limits_{x\to c}\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La demostración del caso general de esta regla sale de los objetivos del curso, por lo tanto no se incluirá en este documento.

**Ejemplos** Calcule los siguientes límites usando, de ser posible, la regal de L´Hôpital:

a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x-3}$ Forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{3} = \frac{2}{3}$$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ Forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}\cdot -\dfrac{2}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}\cdot -\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} 2e^{\frac{1}{x}} = 2\cdot 1 = 2$$

c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x}$ Forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+x^2}{x+e^{-x}}$ Forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2+x^2}{x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1-e^{-x}}$$ se obtiene nuevamente una forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

e. $\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{\text{sen } x}{1-\cos x}$

En este caso no se puede usar la regla de L´Hôpital, ya que no se cumplen las hipótesis, pero el límite se puede calcular evaluando directamente.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\text{sen } x}{1-\cos x}=\frac{0}{2}=0$$

**Otras formas indeterminadas:**

1. **Diferencias indeterminadas** **Forma** $\infty-\infty$

Al calcular el límite $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\csc x\right)$ se obtiene una diferencia indeterminada ya que $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to0^+}\csc x=+\infty$. En este caso se busca transformar la expresión en una que lleve a un cociente indeterminado $\dfrac{\infty}{\infty}$ o $\dfrac{0}{0}$ para poder aplicar el teorema de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen } x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\text{sen } x-x}{x\text{sen } x}\qquad \text{Forma } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\text{sen } x-x}{x\text{sen } x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{\text{sen } x+x\cos x}\qquad \text{Forma } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{\text{sen } x+x\cos x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\text{sen } x}{\cos x+\cos x-x\text{sen } x}=\frac{0}{2}=0$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\csc x\right)=0$

## 2. Productos indeterminados Forma $\infty \cdot 0$

Al calcular el límite $\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-x}\right)$ se obtiene un producto indeterminado ya que $\lim_{x\to\infty} x=\infty$ y $\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$. Se debe buscar una expresión equivalente que lleve a un cociente indeterminado $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ para poder aplicar el teorema de L´Hôpital. En estos casos es útil recordar que $f\cdot g=\dfrac{f}{\frac{1}{g}}=\dfrac{g}{\frac{1}{f}}$:

Aplicando lo anterior se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{e^{-x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}} \qquad \text{Forma } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(xe^{-x}\right)=0$.

## 3. Potencias indeterminadas: Forma $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$

Al calcular el límite $\lim_{x\to0^+}(\cot x)^{\operatorname{sen} x}$ se obtiene una potencia indeterminada ya que $\lim_{x\to0^+}\cot x=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=+\infty$ y $\lim_{x\to0^+}\operatorname{sen} x=0$. Se debe buscar una expresión equivalente que lleve a un cociente indeterminado y poder aplicar el teorema de L´Hôpital.

En estos casos es útil recordar que si $a$ es un número positivo, $a^b=e^{b\ln a}$ y en general, si $f(x)>0$, $\left[f(x)\right]^{g(x)}=e^{\ln\left[f(x)\right]^{g(x)}}=e^{g(x)\ln\left[f(x)\right]}$.

Por lo ânterior, para calcular el límite $\lim_{x\to0^+}(\cot x)^{\operatorname{sen} x}$ se puede hacer la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}(\cot x)^{\operatorname{sen} x}&=\lim_{x\to0^+}e^{\ln(\cot x)^{\operatorname{sen} x}}\\&=\lim_{x\to0^+}e^{\operatorname{sen}(x)\ln(\cot x)}\\&=e^{\lim_{x\to0^+}\left[\operatorname{sen}(x)\ln(\cot x)\right]}\end{aligned}$$

esta última igualdad se cumple porque $f(x)=e^{x}$ es una función continua.

Ahora se puede trabajar con el límite $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\operatorname{sen}(x)\ln(\cot x)\right]$, el cual es una forma $\infty\cdot 0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}(x)\ln(\cot x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\csc x}\qquad \text{forma } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\csc x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cot x}\cdot -\csc^2 x}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\csc x}{\cot^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}=\frac{0}{1}=0$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\operatorname{sen} x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\operatorname{sen}(x)\ln(\cot x)\right]}=e^0=1$

EJERCICIOS

Calcule los siguientes límites:

| | |
|---|---|
| 1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen} x}{x-\frac{\pi}{2}}$ R/ 0 | 27. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot(2x)$ R/ $\frac{1}{2}$ |
| 2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\tan\pi x}{x+2}$ R/ $\pi$ | 28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2\operatorname{sen}(x^2)}$ R/ $\frac{1}{2}$ |
| 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-sen(2x)}{x+sen(3x)}$ R/ $-\frac{1}{4}$ | 29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ R/ $\frac{1}{2}$ |
| 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}$ R/ 5 | 30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ R/ $-\frac{1}{2}$ |
| 5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{3x^2+2x}$ R/ $\frac{1}{2}$ | 31. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$ R/ $-1$ |
| 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$ R/ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ | 32. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ R/ $\frac{1}{2}$ |
| 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-sen\ x}$ R/ 2 | 33. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$ R/ $\frac{1}{2}$ |
| 8. $\forall n\in\mathbb{R}^*, \lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$ R/ $\frac{1}{n}$ | 34. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$ R/ 0 |

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{3^x}$ R/ $0$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ R/ $1$

11. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ R/ $0$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^2}$ R/ $0$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-e^x}$ R/ $-1$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ R/ $0$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$ R/ $+\infty$

16. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x+\ln x}{x^3-3x+2}$ R/ $-\dfrac{1}{6}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-\frac{1}{x}}{e^x+\frac{1}{x}}$ R/ $1$

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(sen\ x)-\cos x}{x^4}$ R/ $\dfrac{1}{6}$

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{sen\ x}$ R/ $2$

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - sen\ x}$ R/ $2$

21. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)$ R/ $0$

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(sen\ x)}{(\pi-2x)^2}$ R/ $-\dfrac{1}{8}$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$ R/ $\dfrac{1}{6}$

36. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$ R/ $e^{-\frac{1}{2}}$

37. $\lim\limits_{x\to 0} (\cot x)^{sen\ x}$ R/ $1$

38. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$ R/ $1$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ R/ $e^{-\frac{1}{6}}$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$ R/ $\dfrac{1}{a}$

41. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$ R/ $e^{-2}$

42. $Si\ a\in\mathbb{R}^+, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ R/ $\ln a$

43. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{x^{-1}}$ R/ $1$

44. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ R/ $0$

45. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$ R/ $0$

46. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+x}{3^x}$ R/ $0$

47. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+x}{3^x}$ R/ $0$

48. $\lim\limits_{x\to 1} x^{(1-x)^{-1}}$ R/ $e^{-1}$

49. $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt[t]{t^2}$ R/ $1$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arc\,sen}\ x}{\operatorname{sen}^3 x}$ R/ $-\dfrac{1}{6}$

24. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y+\operatorname{sen}\ y-1}{\ln(1+y)}$ R/ $2$

25. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$ R/ $1$

26. $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\ln(x-1)$ R/ $0$

50. Demuestre que

$$\forall a,b\in\mathbb{R}^+,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\ln\frac{a}{b}$$

51. Demuestre que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

52. Demuestre que

$$\forall a,b\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=e^{ab}$$

53. Calcule valores reales de $n$ para que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{nx+1}{nx-1}\right)^x=9$ $n=\dfrac{1}{\ln 3}$