**Universidad de Costa Rica**
**Escuela de Matemática**
**Proyecto MATEM**
MA0125 Matemática Elemental

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
Tel.: 2511 4528

# Aplicaciones de funciones exponenciales y logarítmicas

Recopilado por: Prof. José Ml. Acosta Baltodano

## 1. Práctica de funciones exponenciales y logarítmicas

1. Si $D_0$ es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y si su entorno tiene una temperatura $T_s$, entonces la temperatura $T$ del objeto, al tiempo $t$, está dada por $T(t) = T_s + D_0 \cdot e^{-k \cdot t}$; donde $k$ es una constante positiva que depende del tipo de objeto.

   Resuelva el siguiente problema:

   Una taza de café tiene una temperatura de 200° F y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70° F. Después de 10 minutos, la temperatura del café es de 150° F.

   *a*) Determine una fórmula para encontrar la temperatura del café en el tiempo $t$.

   *b*) ¿En cuánto tiempo, aproximadamente, se habrá enfriado el café hasta 100° F?

2. El número de bacterias existentes en un cultivo después de $t$ horas está dado por $A(t) = A_0 \cdot e^{0{,}034 \cdot t}$, donde $A_0$ es la cantidad inicial de bacterias. Encuentre el tiempo que tarda para aumentar 16 veces su tamaño.

3. En cierto circuito eléctrico, la corriente $i$ está dada por $i = 1{,}59 \cdot e^{-2t}$, donde $t$ es el tiempo en segundos.

   *a*) ¿Para qué valor de $t$ es $i = 1{,}00$ A?

   *b*) Calcule la corriente cuando $t = 50$ segundos.

4. El estroncio 90 decae de acuerdo con la ecuación: $N = N_0 \cdot e^{-0{,}028 \cdot t}$, donde $N$ es la cantidad presente después de $t$ años y $N_0$ es la cantidad original. Halle el valor de $t$ para que la cantidad de estroncio 90 presente sea 400 g, suponiendo que $N_0 = 1000$ g.

5. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo, en $t$ horas después, está dada por $A(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$. Calcule la cantidad de fármaco restante en el organismo 8 horas después de la ingestión inicial. ¿Qué porcentaje del medicamento, que está aún en el organismo, se elimina cada hora?

6. La población de una pequeña comunidad después de $t$ años es aproximadamente de $P(t) = 3400 \cdot e^{k \cdot t}$. Si después de diez años la población inicial aumentó en 20 %, ¿cuál será la población aproximada después de otros 10 años?

7. Considere lo siguiente:

   La escala que ha sido desarrollada para medir los terremotos se le conoce como la escala Richter. Esta lleva el nombre del sismólogo americano Charles Richter (1900 – 1985). La fuerza de un terremoto medida por la escala Ritchter está dada por la expresión $R = \log\left(\frac{E}{I_0}\right)$, donde $E$ es la intensidad de las vibraciones del terremoto medido e $I_0$ es la intensidad de la unidad de un terremoto estándar. Esta unidad estándar es medida por un instrumento conocido como sismógrafo, el cual detecta las vibraciones en la corteza terrestre. En efecto, la escala Ritcher es una medida comparativa, más que una medida absoluta.

Considerando lo anterior, resuelva el siguiente problema:

   El 14 de mayo de 1995, el servicio de Información Nacional de Terremotos de los Estados Unidos informó de un terremoto en el sur de California que midió 3,0 en la escala Ritchter, pero, pocas personas se dieron cuenta de esto. Anteriormente, ese mismo año, el día 17 de enero, un terremoto en Kobe, Japón, ocasionó 2000 muertos y billones de dólares en daños. Este midió 7,2 en la escala Ritcher. ¿Cuánto más fuerte fue el terremoto de Kobe, que el del sur de California?

   Considere la siguiente información:

   Si un capital $P$ está invertido a una tasa de interés $r$ durante un periodo de $t$ años, entonces el monto $A$ de la inversión está dado por:

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$$

   Esta fórmula se conoce como interés compuesto $n$ veces por año.

   Utilizando la información anterior, resuelva los problemas 8 y 9:

8. Una persona deposita una suma de 5000 dólares al 4 % de interés compuesto. ¿De cuánto será su capital final al cabo de 10 años, si el interés es pagadero trimestralmente?

9. Un padre de familia desea disponer de una suma de 10 000 dólares dentro de 10 años, cuando sus hijos terminen la educación primaria y secundaria. ¿Qué cantidad debe depositar ahora, al 10 % de interés compuesto anual, para obtener la cantidad que desea?

10. Si se proyecta un haz de luz, de intensidad $k$, verticalmente hacia abajo, dentro del agua, su intensidad $I(x)$, a una profundidad de $x$ metros, es $I(x) = k \cdot e^{-1{,}4 \cdot x}$. ¿A qué profundidad es la intensidad la mitad de su valor en la superficie?

# 2. Soluciones de funciones exponenciales y logarítmicas

1.

a) Determine una fórmula para encontrar la temperatura del café en el tiempo $t$.

De acuerdo con la información presentada en el enunciado, se tiene que:

- Temperatura inicial del objeto: $T_0 = 200$
- Temperatura del entorno: $T_s = 70$
- $D_0 = 200 - 70 = 130$

Entonces, $T(t) = 70 + 130 \cdot e^{-k \cdot t}$

Como $T(10) = 150$

$$\begin{aligned}
70 + 130 \cdot e^{-10k} &= 150 \\
130 \cdot e^{-10k} &= 80 \\
e^{-10k} &= \frac{8}{13} \\
-10k &= \ln\left(\frac{8}{13}\right) \\
k &= \frac{3 \cdot \ln(2) - \ln(13)}{-10} \\
k &\approx 0{,}048\,55
\end{aligned}$$

**Respuesta:** Si se considera $k = 0{,}05$ se tiene que la fórmula para encontrar la temperatura del café, en el tiempo $t$, es $T(t) = 70 + 130 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$

b) ¿En cuánto tiempo, aproximadamente, se habrá enfriado el café hasta 100° F?

Se busca $m$ tal que $T(m) = 100$

$$\begin{aligned}
70 + 130 \cdot e^{-0{,}05 \cdot m} &= 100 \\
130 \cdot e^{-0{,}05 \cdot m} &= 30 \\
e^{-0{,}05 \cdot m} &= \frac{3}{13} \\
-0{,}05 \cdot m &= \ln\left(\frac{3}{13}\right) \\
m &= \frac{\ln(3) - \ln(13)}{-0{,}05} \\
m &\approx 29{,}327
\end{aligned}$$

**Respuesta:** el café se habrá enfriado hasta 100° F, aproximadamente, a los 30 minutos.

2. Como la cantidad inicial de bacterias es $A_0$, se busca $t$ (tiempo) tal que se obtenga $16A_0$, entonces se debe determinar $t$ que cumpa con: $A(t) = 16A_0$

$$\begin{aligned} A_0 \cdot e^{0{,}034 \cdot t} &= 16A_0 \\ e^{0{,}034 \cdot t} &= 16 \\ 0{,}034 \cdot t &= \ln(16) \\ t &= \frac{\ln(16)}{0{,}034} \\ t &\approx 81{,}55 \end{aligned}$$

**Respuesta:** el tiempo aproximado que tarda en aumentar 16 veces su tamaño es 82 horas.

3.

a) Como $i = 1{,}59 \cdot e^{-2t}$

$$\begin{aligned} 1{,}59 \cdot e^{-2t} &= 1 \\ e^{-2t} &= \frac{1}{1{,}59} \\ e^{-2t} &\approx 0{,}6289 \\ -2t &\approx \ln(0{,}6289) \\ t &\approx \frac{\ln(0{,}6289)}{-2} \\ t &\approx 0{,}23 \end{aligned}$$

**Respuesta:** para $t \approx 0{,}23$ s, la corriente $i$ será de 1,00 A (un amperio).

b) Cuando $t = 50$ segundos se tiene:

$$\begin{aligned} i &= 1{,}59 \cdot e^{-2t} \\ i &= 1{,}59 \cdot e^{-2 \cdot 50} \\ i &\approx 5{,}91 \times 10^{-44} \end{aligned}$$

**Respuesta:** después de 50 segundos, la corriente será, aproximadamente, de $5{,}91 \times 10^{-44}$ A.

4. $N = N_0 \cdot e^{-0{,}028t}$

$$\begin{aligned} 1000 \cdot e^{-0{,}028t} &= 400 \\ e^{-0{,}028t} &= \frac{400}{1000} \\ e^{-0{,}028t} &= \frac{2}{5} \\ -0{,}028t &= \ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ t &= \frac{\ln(2) - \ln(5)}{-0{,}028} \\ t &\approx 32{,}725 \end{aligned}$$

**Respuesta:** la cantidad presente será 400 g luego de aproximadamente 33 años.

5.

a) Como $A(8) = 10 \cdot 0{,}8^8 \approx 1{,}68$, entonces la cantidad de fármacos, 8 horas después, es aproximadamente 1,68 mg

b) Cantidad inicial: 10 mg

| Después de: | Quedan |
|---|---|
| 1 hora | $A(1) = 8$ |
| 2 horas | $A(2) = 6{,}4$ |
| 3 horas | $A(3) = 5{,}12$ |

Note que cada hora se va perdiendo el 20 %.
Por ejemplo, de la primera a la segunda hora se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{6{,}4}{x} &= \frac{8}{100\,\%} \\ x &= \frac{100\,\% \cdot 6{,}4}{8} \\ x &= 80\,\% \end{aligned}$$

Es decir, queda el 80 %, por lo que se pierde el 20 %

6. La población inicial es de $P(0) = 3400 \cdot e^{0 \cdot k} = 3400$. El 20 % de la pobación inicial es 680, por lo que dentro de 10 años la población será de 4080, entonces se tiene que $P(10) = 3400 \cdot e^{10k} = 4080$ (de esta se determina el valor de $k$)

$$\begin{aligned} e^{10k} &= \frac{4080}{3400} \\ e^{10k} &= \frac{6}{5} \\ 10k &= \ln\left(\frac{6}{5}\right) \\ k &= \frac{1}{10} \cdot \ln\left(\frac{6}{5}\right) \\ k &\approx 0{,}018\,23 \end{aligned}$$

luego $p(t) = 3400 \cdot e^{0{,}018\,23 \cdot t}$ y como se quiere estimar la población dentro de otros 10 años, basta calcular $p(20)$

$$\begin{aligned} p(20) &= 3400 \cdot e^{0{,}018\,23 \cdot 20} \\ p(20) &\approx 4896 \end{aligned}$$

**Respuesta:** la población será, aproximadamente, de 4896.

7. De acuerdo a la definición de la escala Ritcher dada anteriormente y aplicándola a los datos en el problema se tiene que:

$$3{,}0 = \log\left(\frac{E_C}{I_0}\right) \text{ y } 7{,}2 = \log\left(\frac{E_J}{I_0}\right)$$

Se denota con $E_C$ la intensidad de las vibraciones del terremoto de California y con $E_J$ la intensidad de las vibraciones del terremoto de Japón.

Por las propiedad del logaritmo de un cociente se tiene que:

$$3{,}0 = \log(E_C) - \log(I_0) \text{ y } 7{,}2 = \log(E_J) - \log(I_0)$$

restando ambas ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} \log(E_J) - \log(I_0) - (\log(E_C) - \log(I_0)) &= 7{,}2 - 3{,}0 \\ \log(E_J) - \log(I_0) - \log(E_C) + \log(I_0) &= 4{,}2 \\ \log(E_J) - \log(E_C) &= 4{,}2 \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la propiedad de los logaritmos:

$$\begin{aligned} 4{,}2 = \log\left(\frac{E_J}{E_C}\right) &\implies \frac{E_J}{E_C} = 10^{4{,}2} \\ &\implies \frac{E_J}{E_C} \approx 15\,849 \\ &\implies E_J = 15\,849 \cdot E_C \end{aligned}$$

Use su calculadora para confirmar que $10^{4{,}2} = 15\,849$, es decir, el terremoto de Japón tuvo una intensidad de 15 849 veces mayor que el terremoto de California.

8. De acuerdo con los datos del problema se tiene que:

| | |
|---|---|
| $P = 5000$ | |
| $r = 0{,}04$ | $\left(\text{recuerde que } 4\,\% = \dfrac{4}{100} = 0{,}04\right)$ |
| $t = 10$ | |
| $n = 4$ | (porque el interés se pagará trimestralmente, o sea 4 veces al año) |

Sustituyendo en la fórmula descrita:

$$\begin{aligned} A &= P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \\ A &= 5000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^{4 \cdot 10} \\ A &= 5000 \cdot 1{,}01^{40} \\ A &\approx 7444 \end{aligned}$$

**Respuesta:** su capital final al cabo de 10 años será, aproximadamente, de 7444 dólares.

9. De acuerdo con los datos del problema y de la fórmula dada se tiene que:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $=$ | 10 000 | (es la candidad que se espera obtener de la inversión) |
| $P$ | $=$ | ? | (es la cantidad buscada, es decir, la incógnita del problema) |
| $t$ | $=$ | 10 | (ya que es el periodo de la inversión) |
| $r$ | $=$ | 0,1 | $\left(\text{recuerde que } 10\,\% = \dfrac{10}{100} = 0{,}1\right)$ |
| $n$ | $=$ | 1 | (ya que el interés es compuesto anual, se pagará una vez al año) |

Entonces:

$$
\begin{aligned}
A &= P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t} \\
10\,000 &= P \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{1}\right)^{1 \cdot 10} \\
10\,000 &= P \cdot (1 + 0{,}1)^{10} \\
10\,000 &\approx P \cdot 2{,}593\,7 \\
P &\approx 3855{,}5
\end{aligned}
$$

**Respuesta:** la cantidad que debe depositar ahora es, aproximadamente, de 3855,5 dólares.

10. Como interesa la intensidad en la superficie, se tiene que la profundidad es de 0 metros de, es decir $x = 0$, de donde se obtiene:

$$
\begin{aligned}
I(x) &= k \cdot e^{-1{,}4 \cdot x} \\
I(0) &= k \cdot e^{-1{,}4 \cdot 0} \\
I(0) &= k
\end{aligned}
$$

Como se busca la profundidad, donde la intensidad sea la mitad de su valor en la superficie, se puede establecer que se busca un $p$ que cumpla:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot I(0) = \frac{1}{2}k &= I(p) \\
\frac{1}{2}k &= k \cdot e^{-1{,}4 \cdot p} \\
\frac{1}{2} &= e^{-1{,}4 \cdot p} \\
\ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -1{,}4 \cdot p \\
p &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-1{,}4} \\
p &\approx 0{,}495\,11
\end{aligned}
$$

**Respuesta:** la profundidad a la que la intensidad es la mitad de su valor, en la superficie, es aproximdamente 0,5 metros.

# Referencias

[1] Sancho, Lizeth y Blanco, Randall (2010). Matemática para la enseñanza media. Serie Cabécar. SIEDIN, UCR.

[2] Swokowski, Earl (1986). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Segunda edición. Grupo editorial Iberoamérica.

[3] Weber, Jean (1984). Matemáticas para la administración y la economía. Cuarta edición.