Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM
MA0125 Matemática Elemental

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
Tel.: 2511 4528

Gráficas de funciones trigonométricas

Elaborado por: Prof. José Ml. Acosta Baltodano

1 Práctica de gráficas de funciones trigonométricas

Para cada una de las funciones siguientes obtenga: el periodo, la amplitud, el corrimiento de fase, el ámbito y las intersecciones con los ejes coordenados. Además, trace la gráfica de la misma.

1. $f:\left[-\frac{\pi}{3},\pi\right]\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$
2. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $g(x)=-4\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$
3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=-3\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=-3\operatorname{sen}(4x)$
6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=\frac{4}{3}\cos\left(-\frac{x}{3}\right)$
7. $g:\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, donde $g(x)=2\operatorname{sen}(2x+\pi)+1$
8. $g:\left[-\frac{5\pi}{12},\frac{4\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}$, donde $g(x)=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$
9. $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=-3\operatorname{sen}(2x)$
10. $f:\left[-\frac{\pi}{4},\pi\right]\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=3\cos(2x-\pi)$
11. $f:\left[-\frac{9\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=2\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
12. $f:\left[-\pi,\frac{3\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=3\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

2 Soluciones de gráficas de funciones trigonométricas

1. $f : \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right] \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

   (a) Periodo: $\rho = \frac{2\pi}{2} = \pi$

   (b) Amplitud: 1

   (c) Corrimiento de fase: $\frac{\pi}{6}$

   $$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{3} &= 0 \\ \Rightarrow \quad 2x &= -\frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \quad x &= -\frac{\pi}{6} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{aligned}$$

   (d) Ámbito: $[-2, 0]$

   (e) Corte con el eje Y:

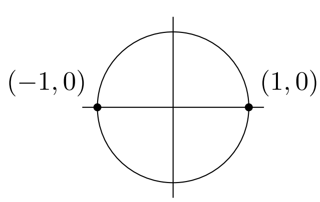
   $$f(0) = \cos\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\frac{1}{2}$$

   $\therefore$ El corte con el eje Y es $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

   (f) Cortes con el eje X:

   $$\begin{aligned} 0 &= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \\ \Rightarrow \quad 1 &= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \Rightarrow \quad 2x + \frac{\pi}{3} &= 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad 2x &= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x &= -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

k	$x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$	¿Está en el dominio?
-1	$-\frac{7\pi}{6}$	$\times$
0	$-\frac{\pi}{6}$	✓
1	$\frac{5\pi}{6}$	✓
2	$\frac{11\pi}{6}$	$\times$

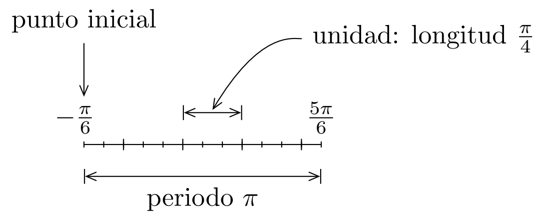


   $\therefore$ Los cortes con el eje X son $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$

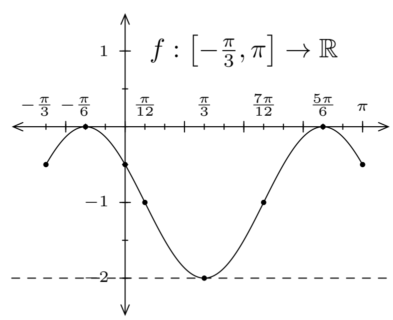
(g) Gráfica

Para graficar

$$
\begin{aligned}
f(0) &= -\frac{1}{2}\\
f(\pi) &= -\frac{1}{2}\\
f\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$



x	$f(x)$
$-\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}$	0
$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$	-1
$\frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$	-2
$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$	-1
$\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$	0



2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = -4\,\mathrm{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

(a) Periodo: $\rho = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

(b) Amplitud: 4

(c) Corrimiento de fase: $\dfrac{\pi}{6}$

$$
\begin{aligned}
2x - \frac{\pi}{3} &= 0\\
\Rightarrow \qquad 2x &= \frac{\pi}{3}\\
\Rightarrow \qquad x &= \frac{\pi}{6} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar}
\end{aligned}
$$

(d) Ámbito: $[-4, 4]$

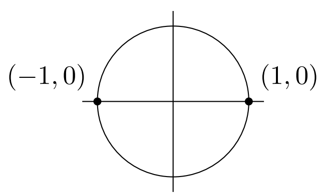
(e) Corte con el eje Y:

$$g(0) = -4\operatorname{sen}\left(2\cdot 0 - \frac{\pi}{3}\right) = -4\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -4\cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $\left(0, 2\sqrt{3}\right)$

(f) Cortes con el eje X:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & -4\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \Rightarrow & 0 & = & \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \\ \Rightarrow & 2x - \frac{\pi}{3} & = & k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & 2x & = & \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & x & = & \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{array}$$



Ejemplos de cortes:

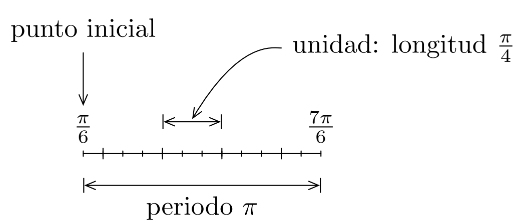
k	$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$	¿Está en el intervalo?
0	$\frac{\pi}{6}$	✓
1	$\frac{2\pi}{3}$	✓
-1	$-\frac{\pi}{3}$	✓
2	$\frac{7\pi}{6}$	✓
$\vdots$	$\vdots$	

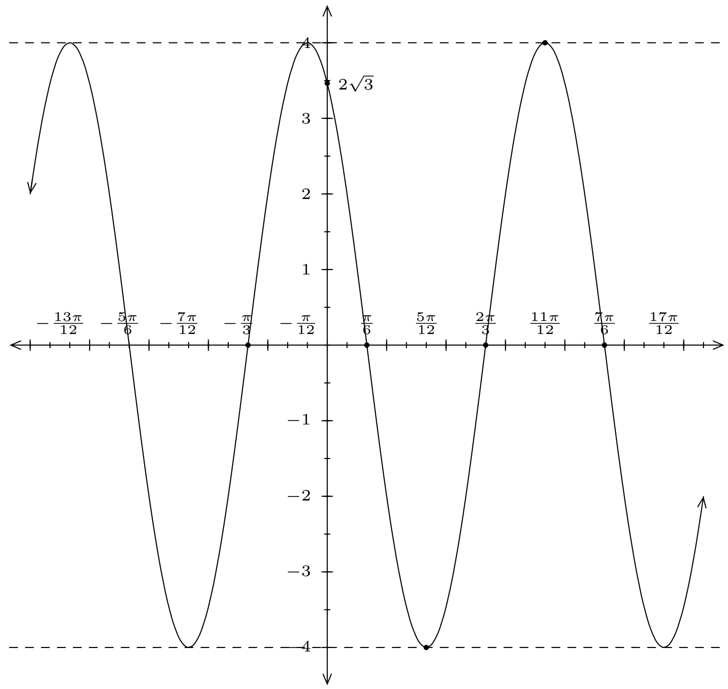
$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, 0\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$g(x)$
$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$	0
$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$	-4
$\frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$	0
$\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$	4
$\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$	0





3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f\,(x) = -2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

   (a) Periodo: $\rho = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

   (b) Amplitud: 2

   (c) Corrimiento de fase: $\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{rrcl} & x - \dfrac{\pi}{2} & = & 0 \\ \Rightarrow & x & = & \dfrac{\pi}{2} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{array}$$

   (d) Ámbito: $[-2, 2]$

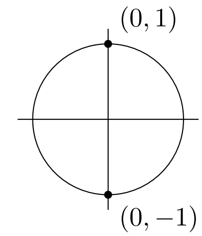
   (e) Corte con el eje Y:

$$f(0) = -2\cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot 0 = 0$$

   $\therefore$ El corte con el eje Y es $(0, 0)$

(f) Cortes con el eje X:

$$
\begin{aligned}
0 &= -2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad 0 &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
\Rightarrow \quad x - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow \quad x &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow \quad x &= \pi + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

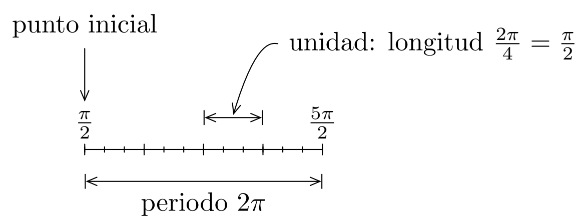


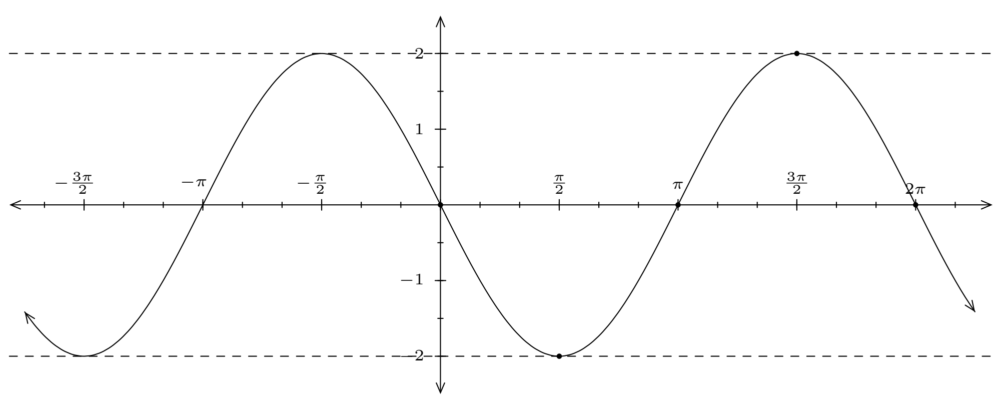
$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $(\pi + k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{2}$	-2
$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$	0
$\frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	2
$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$	0





4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $f(x) = -3\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

   (a) Periodo: $\rho = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

   (b) Amplitud: 3

   (c) Corrimiento de fase: $\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{array}{rrcl} & x+\dfrac{\pi}{2} & = & 0 \\ \Rightarrow & x & = & -\dfrac{\pi}{2} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{array}$$

   (d) Ámbito: $[-3,3]$

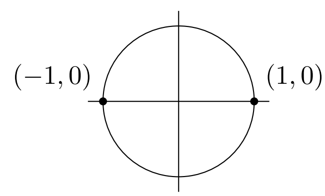
   (e) Corte con el eje Y:

$$f(0) = -3\operatorname{sen}\left(0+\frac{\pi}{2}\right) = -3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3\cdot 1 = -3$$

   $\therefore$ El corte con el eje Y es $(0,-3)$

   (f) Cortes con el eje X:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & -3\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow & 0 & = & \operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow & x+\dfrac{\pi}{2} & = & k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow & x & = & -\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}$$

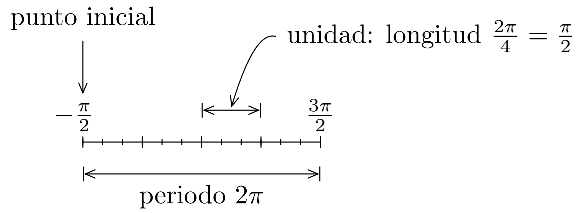


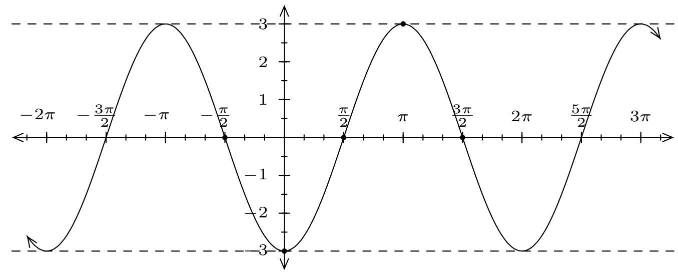
   $\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, 0\right)$, con $k\in\mathbb{Z}$

   (g) Gráfica

   Para graficar

x	$f(x)$
$-\dfrac{\pi}{2}$	0
$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0\pi}{2} = 0$	-3
$\dfrac{2\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$	0
$\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$	3
$\dfrac{4\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$	0





5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde $f(x) = -3\,\mathrm{sen}\,(4x)$

   (a) Periodo: $\rho = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

   (b) Amplitud: 3

   (c) Corrimiento de fase: 0

$$\begin{aligned} 4x &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 0 \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{aligned}$$

   (d) Ámbito: $[-3,3]$

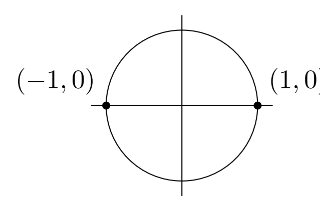
   (e) Corte con el eje Y:

$$f(0) = -3\,\mathrm{sen}\,(4\cdot 0) = -3\,\mathrm{sen}\,(0) = -3\cdot 0 = 0$$

   $\therefore$ El corte con el eje Y es $(0,0)$

   (f) Cortes con el eje X:

$$\begin{aligned} 0 &= -3\,\mathrm{sen}\,(4x) \\ \Rightarrow \quad 0 &= \mathrm{sen}\,(4x) \\ \Rightarrow \quad 4x &= k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

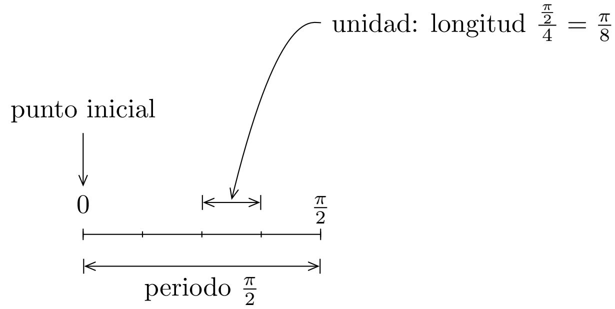


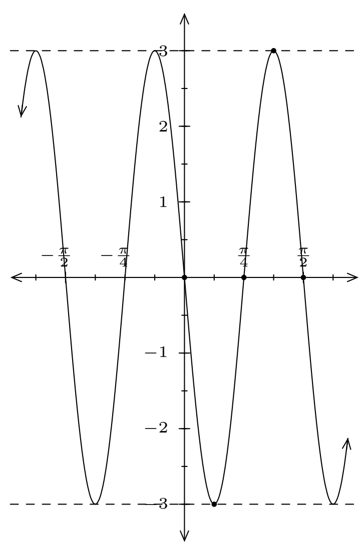
$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(\dfrac{k\pi}{4},0\right)$, con $k\in\mathbb{Z}$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$	-3
$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$	3
$\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$	0





6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = \frac{4}{3}\cos\left(-\frac{x}{3}\right)$

(a) Periodo: $\rho = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

(b) Amplitud: $\frac{4}{3}$

(c) Corrimiento de fase: 0

$$\begin{aligned} -\frac{x}{3} &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 0 \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{aligned}$$

(d) Ámbito: $\left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

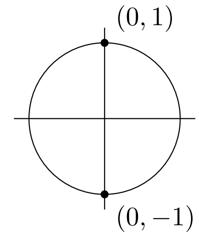
(e) Corte con el eje Y:

$$f(0) = \frac{4}{3}\cos\left(-\frac{0}{3}\right) = \frac{4}{3}\cos(0) = \frac{4}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$

(f) Cortes con el eje X:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{3}\cos\left(-\frac{x}{3}\right) \\ \Rightarrow \quad 0 &= \cos\left(-\frac{x}{3}\right) \\ \Rightarrow \quad -\frac{x}{3} &= \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x &= -\frac{3\pi}{2} - 3k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

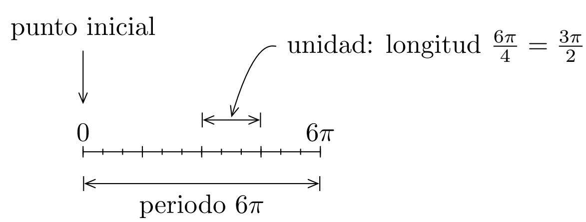


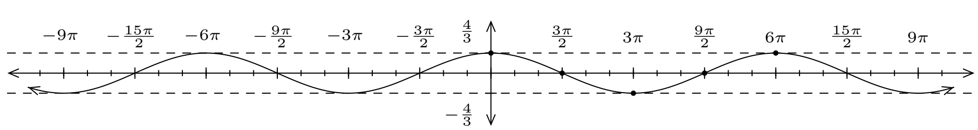
$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(-\dfrac{3\pi}{2} - 3k\pi, 0\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$f(x)$
0	$\frac{4}{3}$
$\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{6\pi}{2} = 3\pi$	$-\frac{4}{3}$
$\frac{9\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$	0
$\frac{12\pi}{2} = 6\pi$	$\frac{4}{3}$





7. $g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, donde $g\left(x\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(2x+\pi\right)+1$

(a) Periodo: $\rho = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

(b) Amplitud: 2

(c) Corrimiento de fase: $\dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 2x+\pi &= 0 \\ \Rightarrow \quad 2x &= -\pi \\ \Rightarrow \quad x &= -\frac{\pi}{2} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{aligned}$$

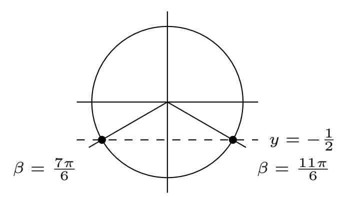
(d) Ámbito: $[-1,3]$

(e) Corte con el eje Y:

$$g\left(0\right) = 2\,\mathrm{sen}\left(2\cdot 0+\pi\right)+1 = 2\cdot 0+1 = 1$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $(0,1)$

(f) Cortes con el eje X:



$$\begin{aligned} 0 &= 2\,\mathrm{sen}\left(2x+\pi\right)+1 \\ \Rightarrow \quad -1 &= 2\,\mathrm{sen}\left(2x+\pi\right) \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} &= \mathrm{sen}\left(2x+\pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2} &= \mathrm{sen}\left(\beta\right) \\ \Rightarrow \quad \beta &= \frac{7\pi}{6}+2k\pi \\ &\text{o} \\ \beta &= \frac{11\pi}{6}+2k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 2x+\pi &= \frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad \text{o} \quad & 2x+\pi &= \frac{11\pi}{6}+2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad 2x &= \frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \text{o} \quad & 2x &= \frac{5\pi}{6}+2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{\pi}{12}+k\pi \quad \text{o} \quad & x &= \frac{5\pi}{12}+k\pi \quad , k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\therefore$ Los cortes con el eje X son de la forma $\left(\frac{\pi}{12}+k\pi, 0\right)$ o $\left(\frac{5\pi}{12}+k\pi, 0\right)$, con $k\in\mathbb{Z}$

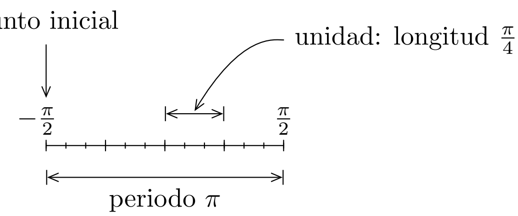
k	$x = \frac{\pi}{12} + k\pi$	¿Está en el dominio?	$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$	¿Está en el dominio?
-1	$-\dfrac{11\pi}{12}$	$\times$	$-\dfrac{7\pi}{12}$	$\times$
0	$\dfrac{\pi}{12}$	$\checkmark$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\checkmark$
1	$\dfrac{13\pi}{12}$	$\times$	$\dfrac{17\pi}{12}$	$\times$

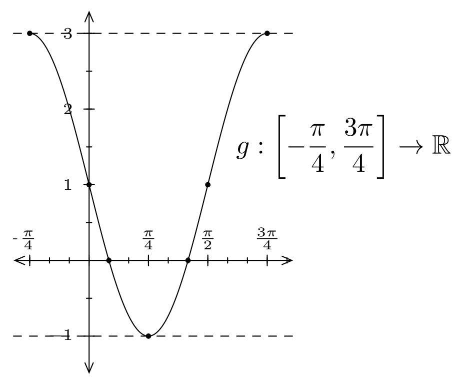
$\therefore$ Los cortes con el eje X son $\left(\dfrac{\pi}{12}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{5\pi}{12}, 0\right)$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$g(x)$
$-\dfrac{\pi}{2}$	1
$\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{4}$	3
$\dfrac{2\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = 0$	1
$\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$	-1
$\dfrac{4\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$	1





8. $g : \left[-\dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{4\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = -2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1$

(a) Periodo: $\rho = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

(b) Amplitud: 2

(c) Corrimiento de fase: $\dfrac{\pi}{6}$

$$\begin{array}{rrcl} & 2x + \dfrac{\pi}{3} & = & 0 \\ \Rightarrow & 2x & = & -\dfrac{\pi}{3} \\ \Rightarrow & x & = & -\dfrac{\pi}{6} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{array}$$

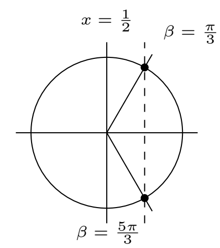
(d) Ámbito: $[-1, 3]$

(e) Corte con el eje Y:

$$g(0) = -2\cos\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = -2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $(0, 0)$

(f) Cortes con el eje X:



$$\begin{aligned} 0 &= -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \\ \Rightarrow \quad -1 &= -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2} &= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} &= \cos(\beta) \\ \Rightarrow \quad \beta &= \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ &\text{o} \\ \beta &= \tfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 2x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad & 2x + \frac{\pi}{3} &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad 2x &= 2k\pi \quad \text{o} \quad & 2x &= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x &= k\pi \quad \text{o} \quad & x &= \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\therefore$ Los cortes con el eje X son de la forma $(k\pi, 0)$ o $\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi, 0\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$

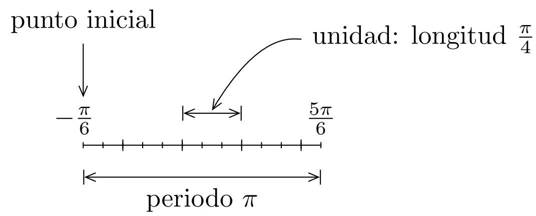
k	$x = k\pi$	¿Está en el dominio?	$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$	¿Está en el dominio?
-2	-2π	$\times$	$-\frac{4\pi}{3}$	$\times$
-1	$-\pi$	$\times$	$-\frac{\pi}{3}$	✓
0	0	✓	$\frac{2\pi}{3}$	✓
1	π	✓	$\frac{5\pi}{3}$	$\times$
2	2π	$\times$	$\frac{8\pi}{3}$	$\times$

$\therefore$ Los cortes con el eje X son $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\dfrac{2\pi}{3},0\right)$ y $(\pi,0)$

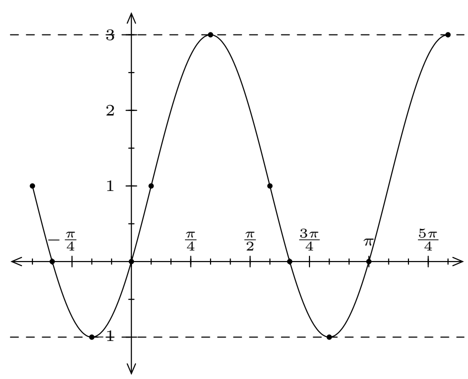
(g) Gráfica

Para graficar

x	$g\,(x)$
$-\dfrac{\pi}{6}$	-1
$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{12}$	1
$\dfrac{2\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$	3
$\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{12}$	1
$\dfrac{4\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$	-1



x	$g\,(x)$
$-\dfrac{5\pi}{12}$	1
$\dfrac{4\pi}{3}$	3



9. $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, donde $f\,(x) = -3\operatorname{sen}(2x)$

(a) Periodo: $\rho = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

(b) Amplitud: 3

(c) Corrimiento de fase: 0

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 0 \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{aligned}$$

(d) Ámbito: $[-3,3]$

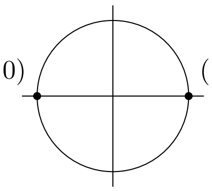
(e) Corte con el eje Y:

$$f(0) = -3\operatorname{sen}(2\cdot 0) = -3\cdot 0 = 0$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $(0,0)$

(f) Cortes con el eje X:

$$\begin{aligned} 0 &= -3\operatorname{sen}(2x) \\ \Rightarrow \quad 0 &= \operatorname{sen}(2x) \\ \Rightarrow \quad 2x &= k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$



$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(\frac{k\pi}{2},0\right)$, con $k\in\mathbb{Z}$

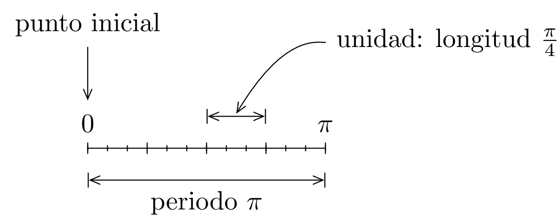
k	$x=\frac{k\pi}{2}$	¿Está en el dominio?
-3	$-\frac{3\pi}{2}$	$\times$
-2	$-\pi$	$\checkmark$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	$\checkmark$
0	0	$\checkmark$
1	$\frac{\pi}{2}$	$\checkmark$
2	π	$\checkmark$
3	$\frac{3\pi}{2}$	$\times$

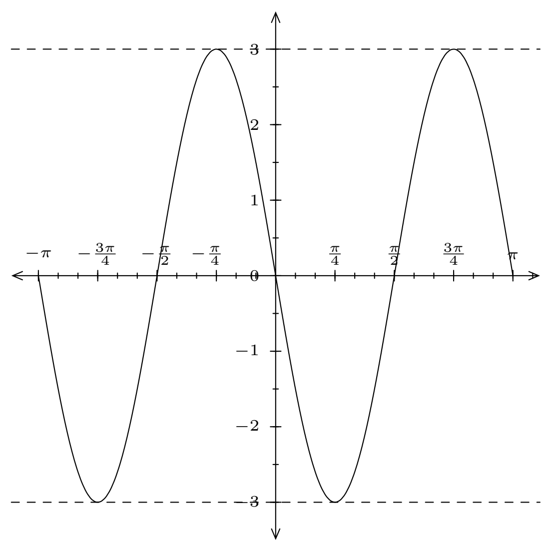
$\therefore$ Los cortes con el eje X son $(-\pi,0)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ y $(\pi,0)$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	-3
$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	3
$\frac{4\pi}{4} = \pi$	0





10. $f : \left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right] \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = 3\cos(2x - \pi)$

(a) Periodo: $\rho = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(b) Amplitud: 3

(c) Corrimiento de fase: $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 2x - \pi &= 0 \\ \Rightarrow \quad 2x &= \pi \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{aligned}$$

(d) Ámbito: $[-3,3]$

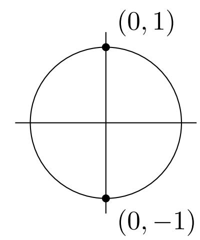
(e) Corte con el eje Y:

$$f(0)=3\cos(2\cdot 0-\pi)=3\cos(-\pi)=3\cdot -1=-3$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $(0,-3)$

(f) Cortes con el eje X:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\cos(2x-\pi)\\ \Rightarrow \quad 0 &= \cos(2x-\pi)\\ \Rightarrow \quad 2x-\pi &= \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow \quad 2x &= \frac{3\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ \Rightarrow \quad x &= \frac{3\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$



$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},0\right)$, con $k\in\mathbb{Z}$

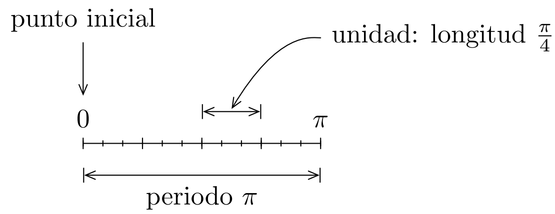
k	$x=\frac{3\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$	¿Está en el dominio?
-3	$-\frac{3\pi}{4}$	$\times$
-2	$-\frac{\pi}{4}$	$\checkmark$
-1	$\frac{\pi}{4}$	$\checkmark$
0	$\frac{3\pi}{4}$	$\checkmark$
1	$\frac{9\pi}{4}$	$\times$

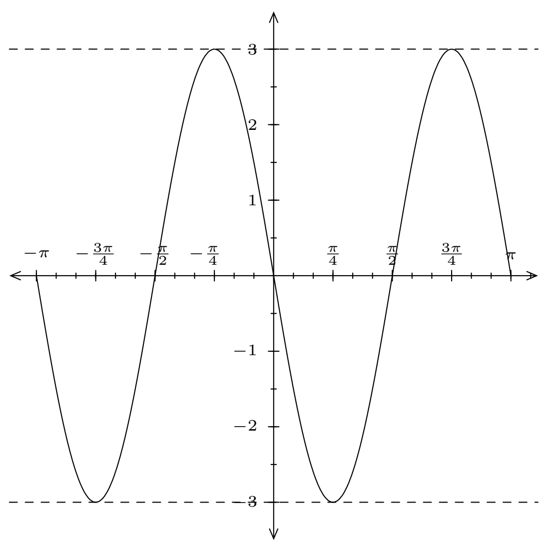
$\therefore$ Los cortes con el eje X son $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	-3
$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	3
$\frac{4\pi}{4} = \pi$	0





11. $f : \left[-\frac{9\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, donde $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(a) Periodo: $\rho = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

(b) Amplitud: 2

(c) Corrimiento de fase: $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} x + \frac{\pi}{4} &= 0 \\ \Rightarrow \qquad 2x &= -\frac{\pi}{4} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{aligned}$$

(d) Ámbito: $[-2, 2]$

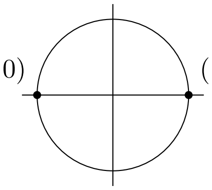
(e) Corte con el eje Y:

$$f(0) = 2\operatorname{sen}\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $\left(0, \sqrt{2}\right)$

(f) Cortes con el eje X:

$$\begin{array}{rrcl} & 0 & = & 2\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow & 0 & = & \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow & x + \frac{\pi}{4} & = & k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow & x & = & -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$



$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$

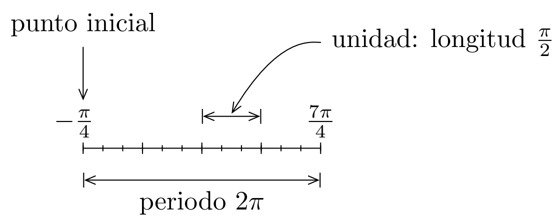
k	$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$	¿Está en el dominio?
-3	$-\frac{13\pi}{4}$	$\times$
-2	$-\frac{9\pi}{4}$	✓
-1	$-\frac{5\pi}{4}$	✓
0	$-\frac{\pi}{4}$	✓
1	$\frac{3\pi}{4}$	✓
2	$\frac{7\pi}{4}$	✓
3	$\frac{11\pi}{4}$	$\times$

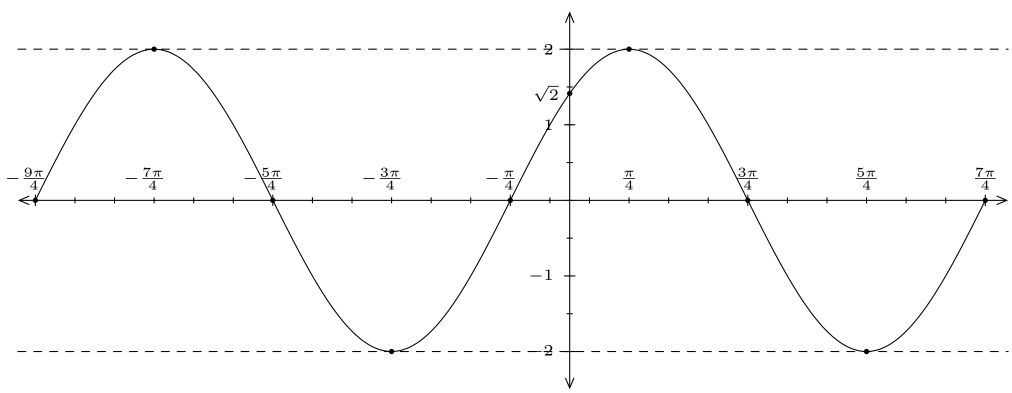
$\therefore$ Los cortes con el eje X son $\left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right)$, $\left(-\frac{9\pi}{4}, 0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	2
$\frac{2\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$	-2
$\frac{4\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$	0





12. $f:\left[-\pi,\frac{3\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, donde $f(x)=3\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

(a) Periodo: $\rho=\frac{2\pi}{2}=\pi$

(b) Amplitud: 3

(c) Corrimiento de fase: $\frac{\pi}{4}$

$$\begin{array}{rrcl} & 2x+\frac{\pi}{2} & = & 0 \\ \Rightarrow & 2x & = & -\frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow & x & = & -\frac{\pi}{4} \leftarrow \text{punto de inicio para graficar} \end{array}$$

(d) Ámbito: $[-3,3]$

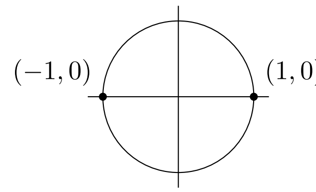
(e) Corte con el eje Y:

$$f(0) = 3\operatorname{sen}\left(2\cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cdot 1 = 3$$

$\therefore$ El corte con el eje Y es $(0,3)$

(f) Cortes con el eje X:

$$\begin{aligned} 0 &= 3\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow \quad 0 &= \operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow \quad 2x+\frac{\pi}{2} &= k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad 2x &= -\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \quad x &= -\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$



$\therefore$ Los cortes con el eje X son los puntos de la forma $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},0\right)$, con $k\in\mathbb{Z}$

k	$x = -\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$	¿Está en el dominio?
-2	$-\frac{5\pi}{4}$	$\times$
-1	$-\frac{3\pi}{4}$	✓
0	$-\frac{\pi}{4}$	✓
1	$\frac{\pi}{4}$	✓
2	$\frac{3\pi}{4}$	✓
3	$\frac{5\pi}{4}$	$\times$

$\therefore$ Los cortes con el eje X son $\left(-\frac{3\pi}{4},0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$

(g) Gráfica

Para graficar

x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = 0$	3
$\frac{2\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$	-3
$\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$	0