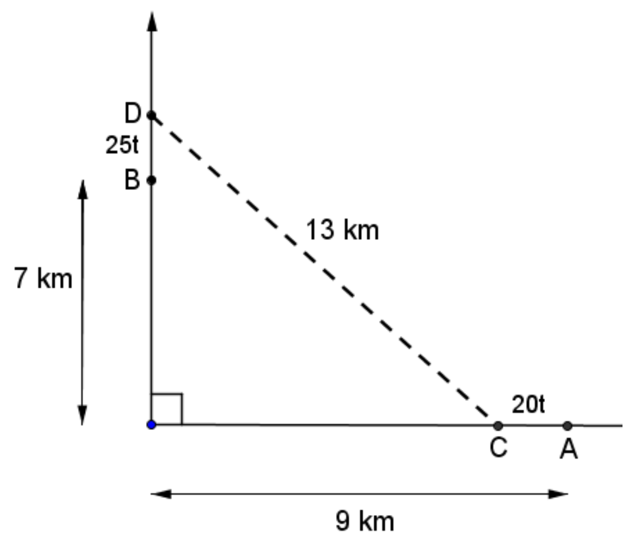
Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM

http://matem.emate.ucr.ac.cr/
tel. (506) 2511-4528

Problemas con ecuaciones



Recopilado por:

José Ml. Acosta Baltodano

2014

Contenido

Presentación

La resolución de problemas es una de las tareas más importantes en la enseñanza de la matemática. En particular, en la enseñanza secundaria, se le plantean a los estudiantes diferentes problemas, donde, para su solución, se necesitan contenidos matemáticos. El objetivo, en general, es lograr en los estudiantes un pensamiento crítico y flexible que le permita trascender de los problemas matemáticos a situaciones generales de la vida cotidiana.

Entre los objetivos del curso MA-125 Matemática Elemental del Proyecto MATEM se pretende, además del aprendizaje de los contenidos, favorecer el desarrollo de habilidades mentales como análisis, diferenciación, comparación, entre otras. Para lograrlo, el resolver problemas buscando diferentes estrategias, juega un papel importante.

El presente folleto consta de 80 problemas con su respetivo solucionario. Se incluyen, entre otros, los 17 problemas de la página 71 del libro del curso MA-125 y otros que formaban parte de los ejercicios adicionales propuestos en la página electrónica del proyecto MATEM en años anteriores. Además, considera los diferentes tipos de problemas clásicos presentes en cualquier curso de precálculo.

Para la elaboración de este material se contó con la participación de los asistentes del proyecto: Tatiana Barrientos, Andrey Mejías y Kevin Castro quienes participaron en parte de la digitación, así como Fabián Hernández, quien participó en la resolución de algunos de los problemas.

Agradezco a la profesora Susana Murillo y a los profesores Luis Diego Rodríguez y Randall Blanco por sus comentarios y sugerencias en la revisión del documento.

Espero que el folleto sirva de apoyo a docentes y estudiantes vinculados al proyecto MATEM en la búsqueda de los objetivos planteados en el mismo.

Prof. José Ml. Acosta Baltodano

Problemas de despeje

1. La relación entre la temperatura F en la escala Fahrenheit y la temperatura C en la escala Celsius está dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Despejar F en términos de C.

2. La fórmula $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ se usa en la teoría de la electricidad para encontrar la resistencia total R, cuando dos resistencias R_1 y R_2 están conectadas en paralelo. Despejar R_1 en términos de R y R_2.

3. La potencia P (en watts) generada por un molino de viento que tiene una eficiencia E está dada por la fórmula $P = 0,31E \cdot D^2 \cdot V^3$, donde D es el diámetro (en pies) de las aspas y V la velocidad del viento (en pies por segundo). Calcule la velocidad del viento que se requiere para generar 10 000 watts si E = 42% y D = 10.

4. La temperatura T en grados Celsius a la que hierve el agua a una altura h metros sobre el nivel del mar está dada por $h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$, con $0 < T < 100$.
   a) Determine la altura a la cual el agua hierve a una temperatura de 98,6 °C.
   b) Determine la temperatura a la cual hierve el agua, cuando la altura es de 1km.

5. Las zonas urbanas tienen promedios más altos de temperatura del aire que las zonas rurales, debido a la presencia de edificios, asfaltos y concreto. Este fenómeno se conoce como isla de calor urbano. La diferencia de la temperatura T (en grados Celsius) entre zonas urbanas y rurales cerca de Montreal, con una población p donde $1000 < p < 1000000$ se puede escribir mediante la fórmula $T = \frac{0,25p^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{v}}$, donde v es la velocidad promedio del viento (en millas por hora) y $v \geq 1$. Calcule p (la cantidad de habitantes) si T = 3 y v = 5.

6. Por lo general, la demanda de cierto artículo depende de su precio. Si otros factores no afectan la demanda, la cantidad Q comprada a un precio P (en centavos de dólar) está dada por $Q = kP^{-c}$, donde k y c son constantes positivas. Encuentre el precio que generará una compra de 5 000 unidades de un producto si $k = 10^5$ y $c = \frac{1}{2}$.

7. El agua cubre el 70,8% de la superficie terrestre, es decir, cerca de $361 \cdot 10^6 km^2$. Calcule, aproximadamente, la superficie total de la Tierra.

Problemas de números

8. El cuadrado de cierto número positivo es cinco más que el cuádruplo del mismo número. Determine el número.

9. El cuadrado de cierto número negativo es el cuádruplo del resultado de aumentar el número en cinco. Determine el número.

10. El dígito de las decenas de cierto número es 3 más que el dígito de las unidades. La suma de los cuadrados de los dos dígitos es igual a 117. Determine el número.

11. Halle un número N de dos cifras si la suma de ellas es 10 tal que si al producto de las mismas se le suma 16 se obtiene otro número de dos cifras M, compuesto por las mismas cifras de N, pero invertidas.

12. Dos números enteros tienen una diferencia de 9 y la suma de sus recíprocos es $\frac{5}{12}$. Calcule los números.

13. Si al duplo de un número entero se le resta el recíproco del entero que le antecede, se obtiene 3. Halle dicho número.

14. El dígito de las decenas de cierto número es 4 más que el dígito de las unidades. La suma de los cuadrados de los dos dígitos es igual a 26. Halle el número.

15. La suma de dos números enteros consecutivos es igual a su producto disminuido en 29. Encuentre los números.

16. La diferencia entre el cuadrado de un número positivo y 7 veces ese número es igual a 18. Calcule el número.

17. La diferencia de dos números naturales es 8 y la suma de sus cuadrados es 194. Halle los números.

18. El producto de dos números naturales consecutivos supera en 2 al séxtuplo del siguiente número consecutivo. Encuentre los dos primeros números.

19. La suma de dos números es 14 y la de sus recíprocos es $\frac{7}{24}$. Obtenga los números.

Problemas geométricos

20. Una habitación rectangular tiene cinco pies más de largo que de ancho. El número correspondiente al área del cuarto, en pies cuadrados, excede al número que corresponde a su perímetro, en pies, por 100; ¿cuáles son las dimensiones de la habitación?

21. Los lados de un triángulo rectángulo son enteros pares consecutivos. Encuentre sus longitudes.

22. El área de un rectángulo es 360 m^2 y el largo excede al ancho en dos unidades. Calcule el perímetro del rectángulo.

23. Halle las longitudes de las aristas de 2 cubos si ellas difieren en 2 cm y sus volúmenes en 98 cm^3.

24. La base de un rectángulo mide 4 pies más que el doble de su altura. El área del rectángulo es de 448 pies cuadrados. Encontrar las dimensiones del rectángulo.

25. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm. Halle la medida de los catetos sabiendo que su suma es 6 cm.

26. En un hoja de papel de 24 por 36 pulgadas se ha de imprimir una fotografía. Los márgenes laterales y el margen superior han de tener el mismo ancho, pero el ancho del margen inferior será el doble de los otros. Encuentre el ancho de los márgenes si el área por imprimir es de $661{,}5\ \text{pulg}^2$.

27. Un terreno rectangular de dimensiones 26 m por 30 m, se bordea exteriormente por un camino de ancho uniforme, si se sabe que el área del camino es 240 m^2, determine la medida del ancho del camino.

28. Un fabricante de envases de lata desea construir una lata cilíndrica de 20 cm de altura y capacidad de 3000 cm^3. Encuentre el radio de la base de la lata.

29. Una caja sin tapa se debe construir cortando de las esquinas de una hoja de lata rectangular, cuya longitud es el doble de su ancho, cuatro cuadrados de 3 pulgadas de lado. ¿Qué tamaño de hoja producirá una caja con un volumen de 60 pulgadas cúbicas?

30. Un trozo de alambre de 100 pulgadas de largo, se corta en dos y cada pedazo se dobla para que tome la forma de un cuadrado. Si la suma de las áreas de las regiones encerradas es 397 $pulg^2$, encuentre la longitud de cada pedazo de alambre.

31. Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿De qué longitud debe ser cada uno de los pedazos si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?

32. Un hombre debe construir en su patio un piso rectangular de concreto de un grosor de 8 cm; además, la longitud del piso debe ser el doble de su ancho. Si el hombre dispone de 6 m^3 de concreto, encuentre las dimensiones (en centímetros) del piso que él podrá construir.

33. Se quiere construir un barril de petróleo cilíndrico y cerrado con una altura de 4 pies, de manera que el área superficial total sea de 10π pies^2. Determine el diámetro del barril.

34. Un granjero intenta cercar un terreno rectangular, si uno de sus lados limita con el granero y desea colocar malla en los otros tres lados, sabiendo que el lado paralelo al granero mide el doble que cada uno de los otros lados y que el área del terreno es 128 m^2, ¿cuántos metros de malla de alambre debe comprar?

35. Dos derrames de petróleo son circulares y sus centros están separados a una distancia de 6 km. Determine cada uno de los radios si la suma de las áreas es igual a 20π. Suponga que los círculos se tocan tangencialmente.

36. Una empresa pequeña desea construir un edificio rectangular cuya base tenga un perímetro de 300 m y un área de 5400 m^2. ¿Qué dimensiones debe tener la base del edificio?

37. El área de un triángulo es 30 pies^2. Determine su base y su altura si esta última excede a la primera por 7 pies.

38. Calcule las medidas de los lados de un triángulo rectángulo si el lado más corto mide 3 unidades menos que el mediano y 6 unidades menos que la hipotenusa.

39. La sala de la casa de los Vargas tiene 13 pies de ancho por 16 pies de largo y quieren alfombrarla, excepto un borde de anchura uniforme. ¿Qué dimensiones deberá tener la alfombra si su área es 108 pies^2?

40. Halle las medidas de los lados de un triángulo rectángulo si su área es 120 u.A. y uno de los catetos es 4 unidades mayor que el doble del otro cateto.

41. Se quiere hacer una caja de 50 cm^3 de volumen con una cartulina cuadrada. Para hacerla se cortan en las esquinas cuadrados de 2 cm de lado. ¿Cuánto debe medir el lado de la cartulina cuadrada?

42. Un rectángulo mide 15 cm de largo y 8 cm de ancho. ¿En cuántos centímetros habría que disminuir, simultáneamente, el largo y el ancho para que la diagonal sea 4 cm menor?

43. La suma de los perímetros de dos cuadrados es 240 cm y la suma de sus áreas es 2 522 cm^2. ¿Cuánto mide el lado de cada cuadrado?

44. El cateto mayor de un triángulo rectángulo mide 60 cm y la diferencia de las proyecciones sobre la hipotenusa es 21 cm. Calcular las medidas de los otros dos lados del triángulo.

45. En un triángulo rectángulo el cateto menor mide 42 cm y los segmentos de la hipotenusa determinados por la altura tienen una diferencia de 98 cm, ¿Cuánto mide la hipotenusa?

46. En un triángulo isósceles la base mide 19 cm y cada uno de los otros lados mide 8 cm más que la altura trazada a la base. ¿Cuál es la medida de la altura sobre la hipotenusa?

Problemas de mezclas

47. Un químico tiene 10 ml de una solución que contiene 30% de concentración de ácido. ¿Cuántos mililitros de ácido puro deben agregarse para aumentar la concentración de ácido a 50%?

48. Un radiador contiene 8 litros de una mezcla de agua y anticongelante. Si 40% de la mezcla es anticongelante, ¿qué cantidad de mezcla debe eliminarse y reemplazarse por anticongelante puro para que la mezcla resultante contenga 60% de anticongelante?

49. Se tienen dos tipos de café: el café tipo A cuesta 1250 colones cada libra y el café tipo B cuesta 1750 colones cada libra. Si se quiere obtener una mezcla de café que cueste 1600 colones la libra, ¿cuántas libras del tipo A se deben mezclar con 140 lb del tipo B?

50. ¿Cuántos galones de un líquido que contiene 74% de alcohol se deben combinar con 5 gal de otro líquido que contiene 90 % de alcohol, para obtener una mezcla que contenga 84% de alcohol?

Problemas de velocidades

51. La distancia que recorre un automóvil desde el momento en que el conductor decide aplicar los frenos hasta el instante en que se detiene, se conoce como distancia de frenado. Para determinado automóvil que avanza a v mi/h, la distancia de frenado d (en pies) está dada por $d = v + \frac{v^2}{20}$.

a) Calcule la distancia de frenado cuando la velocidad es de 55 mi/h.
b) Si el conductor decide aplicar los frenos a 120 pies de una señal de alto, ¿cuán rápido puede ir en ese momento para tener oportunidad de detenerse al llegar a la señal?

52. Dos ciudades, A y B, están conectadas por medio de una carretera de 150 km. Un automóvil sale de la ciudad A a la 1:00 pm y viaja a una velocidad uniforme de 40 $\frac{km}{h}$ hacia la ciudad B. Treinta minutos más tarde, otro automóvil sale de A y viaja hacia B a una velocidad uniforme de 55 $\frac{km}{h}$. ¿A qué hora alcanza el segundo automóvil al primero?

53. Una familia hace un viaje desde la ciudad a un lago. De ida viajan a 30 $\frac{km}{h}$ y de regreso a 48 $\frac{km}{h}$. Si en un recorrido tardan 12 minutos más que en el otro, ¿cuál es la distancia entre ambos lugares?

54. Ana recorrió 10 km en su vehículo a una velocidad constante. Luego condujo otros 25 km con una velocidad que excede a la del recorrido anterior en 10 $\frac{km}{h}$. Si tardó 45 minutos en recorrer los 35 km, calcule la velocidad del primer tramo. (Suponga que en ambos períodos la velocidad fue constante)

55. Los miembros de un club de montañismo hicieron un viaje de 380 km a un campo base en 7h. Viajaron 4h sobre carretera pavimentada y el resto a través de un camino en medio del bosque. Si la velocidad en esa segunda parte fue 25 $\frac{km}{h}$ menor que la velocidad en carretera, calcule la velocidad promedio y la distancia recorrida en cada tramo del viaje.

56. La velocidad de la corriente de un río es de 5 $\frac{km}{h}$. Un joven remando en su canoa 1,2 km en contra de la corriente tarda 30 min más que cuando recorre la misma distancia río abajo. ¿A qué velocidad remaría en aguas tranquilas (en ausencia de corriente)?

57. Un tren emplea cierto tiempo en recorrer 240 km. Si la velocidad hubiera sido 20 km por hora más que la que llevaba, hubiera tardado dos horas menos en recorrer dicha distancia, ¿en qué tiempo recorrió los 240 km?

58. Un deportista caminó 30 km en cierto número de horas. Si hubiera caminado 1 km más por hora habría tardado 1 hora menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuántos kilómetros por hora recorrió?

59. Un río comunica dos ciudades. Para desplazarse de una de ellas a la otra por medio del cauce de ese río se deben recorrer 80 km. Un barco recorre esta distancia dos veces (hacia arriba y hacia abajo) en 8 h 20 m. Determinar la velocidad del barco en agua quieta si la velocidad de la corriente es de 4 km/h.

60. La distancia entre dos estaciones ferroviarias es de 96 km. Para hacer este recorrido el tren rápido requiere $\frac{2}{3}$ del tiempo que tarda el tren ordinario. Halle la velocidad de cada tren, si se sabe que la diferencia entre sus velocidades es de 12 km/h.

61. Un corredor hizo 72 km en un cierto tiempo. Si hubiese corrido a 2 km más por hora, hubiera tardado 6 horas menos para recorrer esa distancia. ¿cuál es su velocidad habitual?

62. Un tren de carga recorre 90 millas en el mismo tiempo en que un tren de pasajeros viaja 105 millas. Si este último es 5 millas por hora más rápido; ¿cuál es la velocidad del tren de carga?

63. Dos corredores A y B parten del mismo punto P en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. A corre $4\,\text{km/h}$ más rápido que B. Después de dos horas se encuentran a 40 km de distancia uno del otro. Determine la velocidad a la que se desplaza B.

64. Un aeroplano, A, vuela hacia el norte a 200 mi/h y pasa sobre cierto lugar a las 2:00 p.m. Otra aeronave, B, que vuela hacia el este a la misma altitud y a 400 mi/h, pasa sobre el mismo lugar a las 2:30 p.m. ¿A qué hora, después de las 2:30 p.m. estaban los aviones a 500 millas uno de otro?

65. Juan y Clara están manejando sus bicicletas, cada uno en una carretera, las cuales se intersecan perpendicularmente. Suponga que Juan se halla a 9 km de la intersección y acercándose a ella a 20 km/h, mientras que Clara está a 7 km de la intersección y alejándose de ella a 25 km/h; ¿al cabo de qué tiempo estarán separados una distancia de 13 km?

66. Dos aviones, P y Q, vuelan en trayectorias perpendiculares, a la misma altitud. Suponga que en un determinado momento el avión P está volando hacia el norte a 400 $\frac{km}{h}$ desde un punto que se ubica a 100 km al sur del punto de intersección de las trayectorias. En ese mismo momento, el avión Q está volando hacia el oeste a 300 $\frac{km}{h}$ desde un punto ubicado a 200 km al este del punto de intersección de las trayectorias. ¿Cuánto debe transcurrir para que la distancia entre los aviones sea de 100 km?

67. Un equipo de remeros puede recorrer 12 millas río abajo y regresar en un total de 5 horas. Si la velocidad de la corriente es 1 milla por hora, encuentre la velocidad a la que puede remar el equipo en aguas tranquilas (en ausencia de corriente).

Problemas de acciones simultáneas

68. Germán puede hacer cierto trabajo en 3 horas, mientras que Juan puede hacer el mismo en 4 horas. Si trabajan juntos, ¿cuánto tiempo les lleva hacer el trabajo?

69. Al realizar un mismo trabajo, A demora 11 horas menos del doble del tiempo que emplea B. Si A y B trabajando juntos pueden terminar el mismo trabajo en 28 horas, ¿cuánto tarda cada uno en hacerlo solo?

70. Dos mangueras pueden llenar un tanque en cierto tiempo cuando se las dejas abiertas a ambas. La primera puede llenar sola el tanque en 4 minutos más de lo que duran las dos mangueras juntas y la segunda en 9 minutos más. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo juntas?

71. Un granjero puede labrar un campo en 4 días utilizando un tractor. Un jornalero puede labrar el mismo campo en 6 días utilizando un tractor más pequeño. ¿Cuántos días se requieren para hacer el trabajo si trabajan juntos?

72. Un tanque de reacciones químicas se puede llenar mediante dos mangueras. Con una de ellas se requieren 42 min para llenar el tanque, y con la otra se requieren 30 min. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar el tanque utilizando ambas mangueras?

73. Dos obreros trabajando juntos pueden cumplir una tarea dada en 12 horas. Uno de ellos, por separado, puede terminar el mismo trabajo 10 horas antes que el otro. ¿En cuántas horas puede cada uno, por separado, realizar la misma tarea?

74. Los tiempos requeridos por dos estudiantes para pintar un metro cuadrado del piso de su dormitorio difieren en 1 min. Si juntos pueden pintar 27 m^2 en una hora, ¿cuánto tarda cada uno en pintar 1 m^2?

Problemas de oferta demanda

75. Una excursión organizada por el club de montañismo costó $300 dólares. Si hubieran asistido 3 miembros menos del club, el costo por persona habría sido de $5 más. ¿Cuántos miembros del club participaron?

76. Una persona realizó un trabajo por $192. El trabajo le llevó 4 horas más de lo previsto y entonces ganó $2,4 menos por hora de lo esperado. ¿Para cuánto tiempo se había planificado la obra?

77. María pagó por cierto número de objetos $ 300. Por el mismo precio, pudo haber comprado 10 objetos más, si cada uno hubiese costado $ 5 menos. ¿Cuántos objetos compró?

78. En una tienda, cuando el precio de un reproductor de discos compactos es $300 por unidad, se venden 15 unidades por semana. Sin embargo, por cada rebajo de $10 al precio por unidad hay dos ventas más por semana; ¿qué precio de venta producirá ingresos semanales de $7000?

79. Halle el costo de un objeto que, al venderlo a $11, se gana un tanto por ciento igual a dicho costo.

80. Carlos compró algunas acciones en $1560. Después, cuando el precio había aumentado $24 por acción, se dejó 10 y vendió las demás en $1520; ¿cuántas acciones vendió Carlos y cuántas había comprado?

Respuestas

Problemas de despeje

Problema	Respuesta
1	$F=\frac{9}{5}C+32$
2	$R_1=\frac{R_2R}{R_2-R}$
3	$9{,}16\ \frac{pies}{s}$
4	a) 2536,8 metros b) $99{,}29\,^{\circ}\mathrm{C}$
5	$p=518400$ habitantes
6	$4 por unidad.
7	$5098870{,}056\ \mathrm{km}^2$

Problemas de números

Problema	Respuesta
8	5
9	$2-2\sqrt{6}$
10	96
11	73
12	12 y 3
13	2
14	51

15	6 y 7 o bien –5 y –4
16	9
17	5 y 13
18	7 y 8
19	6 y 8

Problemas geométricos

Problema	Respuesta
20	Ancho: 10 pies, largo: 15 pies
21	6, 8 y 10
22	$76m$
23	3 y 5
24	14 pies y 32 pies
25	$\frac{6+\sqrt{14}}{2}$ y $\frac{6-\sqrt{14}}{2}$
26	Superior: 1,5 pulg, inferior: 3 pulg.
27	2 metros
28	$\sqrt{\frac{150}{\pi}}$
29	8 por 16 pulgadas
30	24 y 76
31	4 pies
32	$250\sqrt{6}\ cm$, $500\sqrt{6}\ cm$ y 8 cm.
33	Radio: 1 pie, diámetro: 2 pies

34	32 metros
35	4km y 2km
36	60 x 90 metros
37	5 pies y 12 pies
38	9,12 y 15
39	Ancho: 9 pies, largo: 12 pies
40	10ul, 24ul y 26ul
41	$9\ cm$
42	$3cm$
43	$11cm$ y $49cm$
44	$12\sqrt{39}$ y 96
45	126 cm
46	$\frac{105}{64}$ cm

Problemas de mezclas

Problema	Respuesta
47	4 ml
48	$\frac{8}{3}$
49	60
50	3 galones

Problemas de velocidades

Problema	Respuesta
51	a) $206,25$ pies b) menor o igual que $40\ mi/h$
52	2:50 pm
53	16 km
54	$40 km/h$
55	$65\frac{km}{h}$, $260\ \frac{km}{h}$, $40\frac{km}{h}$, $120\frac{km}{h}$
56	$7\ \frac{km}{h}$
57	6 horas
58	5km por hora
59	$20\ km/h$
60	Rápido: $36\frac{km}{h}$, ordinario: $24\frac{km}{h}$
61	$4\frac{km}{h}$
62	30 millas por hora
63	$12\frac{km}{h}$
64	3:30 p.m
65	12 minutos
66	24 min
67	$5\frac{km}{h}$

Problemas de acciones simultáneas

Problema	Respuesta
68	1 hora y 43 minutos
69	A: 77 horas , B: 44
70	6 minutos
71	$2\frac{2}{5}$ días
72	17,5 minutos
73	20 horas y 30 horas
74	5 y 4 minutos

Problemas de oferta demanda

Problema	Respuesta
75	15
76	16 horas
77	20 objetos
78	$200
79	$10
80	Comprado: 30 acciones, vendió: 20

Solucionario

Problemas de despeje

Problema 1

Solución:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5}C = F - 32$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5}C + 32 = F$$

RESPUESTA: $F = \frac{9}{5}C + 32$

Problema 2

Solución:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \ (R_1 + R_2)R = R_1 R_2$$

$$\Rightarrow \ R_1 R + R_2 R = R_1 R_2$$

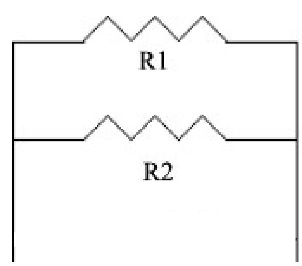
$$\Rightarrow \ R_1 R - R_1 R_2 = -R_2 R$$

$$\Rightarrow \ R_1 (R - R_2) = -R_2 R$$

$$\Rightarrow \ R_1 = \frac{-R_2 R}{R - R_2}$$

$$\Rightarrow \ R_1 = \frac{-R_2 R}{-(R_2 - R)}$$

$$\Rightarrow \ R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}$$



Note que para que esta resistencia esté definida, se necesita que $R \neq R_2$

RESPUESTA: $R_1 = \frac{R_2 R}{R_2 - R}$

Problema 3

<u>Solución</u>:

Como $P = 0,31 \cdot E \cdot D^2 \cdot V^3$

$$\Rightarrow\ V^3 = \frac{P}{0,31 \cdot E \cdot D^2}$$

$$\Rightarrow\ V = \sqrt[3]{\frac{P}{0,31 \cdot E \cdot D^2}}$$

Además $P = 10000,\ E = \frac{42}{100} = 0,42$ y $D = 10$

Entonces:

$$V = \sqrt[3]{\frac{10000}{0,31 \cdot 0,42 \cdot 10^2}}$$

$$\Rightarrow\ V \approx \sqrt[3]{768,05}$$

$$\Rightarrow\ V \approx 9,16$$

RESPUESTA: Para generar 10000 watts con dicho molino, se requiere que la velocidad del viento sea aproximadamente $9,16\ \frac{pies}{s}$

Problema 4

<u>Solución</u>:

a) Sustituyendo T = 98,6 en la ecuación:

$$h = 1000(100 - 98,6) + 580(100 - 98,6)^2$$

$$h = 2536,8$$

b) Note que 1km=1000 metros, dado que la altura en la ecuación está dada en metros

$$1000 = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$$

Sea $y = 100 - T$

$$\Rightarrow\ 580y^2 + 1000y - 1000 = 0$$

$$\Rightarrow\ 29y^2 + 50y - 50 = 0$$

<u>Nota:</u>

$a = 29 \qquad \Delta = 50^2 - 4 \cdot 29 \cdot (-50)$

$b = 50 \qquad \Delta = 8300$

$c = -50$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-50 \pm \sqrt{8300}}{58}$$

$$\Rightarrow \quad y \approx 0,708 \quad \text{o} \quad y \approx -2,43$$

Entonces

$100 - T = 0,708$ o $100 - T = -2,43$

$$\Rightarrow \quad T = 99,29 \;\text{ o }\; T = 102,43^{\circ}\mathrm{C}$$

RESPUESTA: a) El agua hierve a una temperatura de $98,6^{\circ}\mathrm{C}$ cuando la altura es de 2536,8 metros.

b) Cuando la altura es de 1 km., el agua hierve a $99,29^{\circ}\mathrm{C}$

Problema 5

Solución:

Como $T = \dfrac{0,25 p^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{v}}$

$$\Rightarrow \quad T \cdot \sqrt{v} = 0,25 \cdot p^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad p^{\frac{1}{4}} = \frac{T \cdot \sqrt{v}}{0,25}$$

$$\Rightarrow \quad p = \left(\frac{T \cdot \sqrt{v}}{0,25}\right)^{4}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{T^{4} \cdot v^{2}}{(0,25)^{4}} = 256 \cdot T^{4} \cdot v^{2}$$

Si $T = 3$ y $v = 5$ se tiene que $p = 256 \cdot 3^{4} \cdot 5^{2} = 518\ 400$

RESPUESTA: $p = 518400$ habitantes

Problema 6

Solución:

Utilizando la fórmula del enunciado del problema, se puede determinar el precio por artículo.

$$Q = k \cdot P^{-c}$$

$$\Rightarrow \; Q = \frac{k}{P^c}$$

$$\Rightarrow \; P^c = \frac{k}{Q}$$

$$\Rightarrow \; P = \left(\frac{k}{Q}\right)^{\frac{1}{c}}$$

Como $k = 10^5$, $c = \frac{1}{2}$ y $Q = 5000$ entonces

$$P = \left(\frac{10^5}{5000}\right)^2$$

$P = 400$ centavos de dólar

RESPUESTA: Comprando esa cantidad de producto, se generará un precio de $4 por unidad.

Problema 7

Solución:

Sea S la superficie total de la tierra. Entonces:

$$\frac{70{,}8}{100} S = 361 \cdot 10^6$$

$$S = \frac{361 \cdot 10^8}{70{,}8} \approx 5098870{,}056 \text{ km}^2$$

RESPUESTA: La superficie total de la tierra es aproximadamente $5098870{,}056 \text{ km}^2$

Problemas de números

Problema 8

Solución:
Sea x el número buscado. Entonces

$x^2 = 5 + 4x$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 5 \text{ o } x = -1$

Como el número es positivo se debe cumplir que $x = 5$.

RESPUESTA: el número buscado es 5.

Problema 9

Solución:
Sea x el número buscado.
Según las condiciones del problema se tiene que:

$x^2 = 4(x+5)$

$\Rightarrow x^2 = 4x + 20$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 20 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{4+\sqrt{96}}{2}, \ x = \dfrac{4-\sqrt{96}}{2}$

$\Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{6}, \ x = 2 - 2\sqrt{6}$

Como x es un número negativo, se debe cumplir que $x = 2 - 2\sqrt{6}$

RESPUESTA: el número buscado es $2 - 2\sqrt{6}$

Problema 10

Solución:

Recuerde que una forma de escribir un número entero n de dos cifras es $n = d \cdot 10^1 + u \cdot 10^0$.
Por ejemplo: $48 = 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$

Sea x el dígito de las unidades, entonces $x+3$ es el dígito de las decenas. Note que tanto x como $x+3$ deben ser números enteros de 0 a 9.

$x^2 + (x+3)^2 = 117$

$\Rightarrow \quad x^2 + x^2 + 6x + 9 = 117$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 6x - 108 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + 3x - 54 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+9)(x-6) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -9, \quad x = 6$

Entonces, si $x = 6$, el número sería $n = (x+3) \cdot 10^1 + x \cdot 10^0 \quad \Rightarrow n = (6+3) \cdot 10 + 6 = 96$

RESPUESTA: el número es 96.

Problema 11

Solución:

Sea x el número de las unidades. (Note que es entero de 0 a 9)

$10 - x$: Número de las decenas

Entonces, $N = (10 - x) \cdot 10 + x$ es el número buscado

$M = 10x + (10 - x)$ es el número con las cifras invertidas.

Según el enunciado del problema se tiene que:

$$x(10 - x) + 16 = 10x + (10 - x)$$

$$\Rightarrow \; 10x - x^2 + 16 = 10x + 10 - x$$
$$\Rightarrow \; -x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \; -(x-3)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow \; x=3 \quad \text{o} \quad x=-2$$

Como x es entero de 0 a 9 se tiene que $x=3$

Es decir, el número $N=(10-3)\cdot 10+3$ o sea $N=73$

Se puede verificar observando que $7\cdot 3+16=37$, lo cual corresponde al número M

RESPUESTA: el número buscado es 73

Problema 12

Solución:

Sea x el mayor de los números, entonces el menor es $x-9$. Como los recíprocos son $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x-9}$ se tiene que:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}=\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \; \frac{12(x-9)+12x}{12x(x-9)}=\frac{5\,x(x-9)}{12x(x-9)}$$

$$\Rightarrow \; \frac{12(x-9)+12x-5x(x-9)}{12x(x-9)}=0$$

$$\Rightarrow \; 12x-108+12x-5x^2+45x=0$$

$$\Rightarrow \; 5x^2-69x+108=0$$

$$\Rightarrow \; (5x-9)(x-12)=0$$

$$\Rightarrow \; x=\frac{9}{5} \quad \text{o} \quad x=12$$

Como los números tienen que ser enteros el valor de x que se utiliza para resolver el problema es 12. Note que $\frac{1}{12}+\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$.

RESPUESTA: Los números buscados son 12 y 3.

Problema 13

Solución:

Sea x el número entero buscado.

$x-1$: El antecesor del número buscado, siendo su recíproco $\dfrac{1}{x-1}$

Según los datos del problema se tiene que:

$$2x-\frac{1}{x-1}=3$$

$$\Rightarrow \frac{2x(x-1)-1}{x-1}=\frac{3(x-1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x-1=3x-3$$

$$\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ o } x=2$$

Como x debe ser entero se tiene que $x=2$

RESPUESTA: el número buscado es 2

Problema 14

Solución:

Para la solución de este problema se utilizará la notación desarrollada de un número. Recuerde por ejemplo que $56=5\cdot 10+6$. En general, si en un número de dos cifras los dígitos de las unidades y decenas son u y d respectivamente, entonces el número es igual a $10d+u$.

Sea x el dígito de las unidades, entonces el dígito de las decenas es $x+4$ y el número es $n=(x+4)\cdot 10+x$. Además, se tiene que:

$$\Rightarrow \quad (x+4)^2+x^2=26$$

$$\Rightarrow \quad x^2+8x+16+x^2=26$$

$$\Rightarrow \; 2x^2 + 8x - 10 = 0$$
$$\Rightarrow \; x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$\Rightarrow \; (x+5)(x-1) = 0$$
$$\Rightarrow \; x = -5, \; x = 1$$

Como x es un dígito (número entero de 0 a 9), se tiene que $x = 1$. Note que $(4+1)^2 + 1^2 = 26$. Entonces el número buscado es $n = (1+4)\cdot 10 + 1 = 51$

RESPUESTA: el número buscado es 51.

Problema 15

Solución:
Como son consecutivos, consideremos x y $x+1$ los números buscados. Como la relación descrita en el enunciado es que al sumarlos, su resultado será el mismo que al multiplicarlos y restarle 29: $x + (x+1) = x(x+1) - 29$

$$x + (x+1) = x(x+1) - 29$$
$$\Rightarrow 2x + 1 = x^2 + x - 29$$
$$\Rightarrow -x^2 + 2x - x + 1 + 29 = 0$$
$$\Rightarrow -x^2 + x + 30 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 30 = 0$$
$$\Rightarrow (x+5)(x-6) = 0$$
$$\Rightarrow x = -5 \; o \; x = 6$$

En este caso se tienen dos respuestas que cumplen con las condiciones que pide el enunciado. Al ser números enteros, dichos pares de números son 6 y 7 o bien –5 y –4

RESPUESTA: Los números son 6 y 7 o bien –5 y –4

Verificación:

Pareja de números	Suma	producto	Relación dada en el problema: $suma = \; producto - 29$
6 y 7	13	42	$13 = 42 - 29$
–5 y –4	–9	20	$-9 = 20 - 29$

Note que se cumplen las condiciones enunciadas en el problema. Además, si se hubieran pedido dos números naturales consecutivos, se hubiera tenido que eliminar la segunda pareja.

Problema 16

Solución:
Sea:
$x =$ un número positivo
$x^2 =$ cuadrado de este número
$7x =$ siete veces dicho número

La diferencia es el resultado de la resta, por lo cual se puede establecer la siguiente ecuación:

$$x^2 - 7x = 18$$
$$\Rightarrow x^2 - 7x - 18 = 0$$
$$\Rightarrow (x+2)(x-9) = 0$$
$$\Rightarrow x = -2 \text{ o } x = 9$$

Como el ejercicio hace referencia a un número positivo el valor de x que se utiliza es 9

RESPUESTA: El número es 9.

NOTA: Observe que para este número su cuadrado es 81 y siete veces él es 63, cumpliéndose, como dice el enunciado, que su diferencia es 18.

Problema 17

Solución:
Sea n un número natural, como la diferencia con otro número natural es 8, se puede escribir el otro número natural como $n+8$. (También se puede considerar $n-8$)
Según los datos del problema se tiene que:

$$n^2 + (n+8)^2 = 194$$
$$\Rightarrow n^2 + n^2 + 16n + 64 = 194$$
$$\Rightarrow 2n^2 + 16n + 64 = 194$$
$$\Rightarrow n^2 + 8n + 32 = 97$$
$$\Rightarrow n^2 + 8n - 65 = 0$$
$$\Rightarrow (n-5)(n+13) = 0$$
$$\Rightarrow n = 5 \text{ o } n = -13$$

Como en el ejercicio hace referencia a números naturales el resultado que sirve es $n = 5$.
Además, sustituyendo el valor de n en la expresión $n + 8$, se obtiene que el otro número es 13.

RESPUESTA: Los números buscados son 5 y 13.

NOTA: Observe que si se hubiera considerado *n* – 8, aunque la ecuación planteada sea ligeramente distinta, los números buscados coinciden.

Problema 18

Solución:
Sea n uno de los números naturales consecutivos.
$n+1$ es el sucesor de n
$n+2$ es el sucesor de $n+1$
Según los datos del problema se tiene que:

$$n(n+1) = 6(n+2) + 2$$

$$\Rightarrow n^2 + n = 6n + 12 + 2$$

$$\Rightarrow n^2 - 5n - 14 = 0$$

$$\Rightarrow (n-7)(n+2) = 0$$

$$\Rightarrow n = 7 \text{ o } n = -2$$

Como n es un numero natural se tiene que $n = 7$

RESPUESTA: los primeros dos números son 7 y 8

Problema 19

Solución:
Sea x uno de los números. $14 - x$ es el otro número (porque la suma de ambos da 14)

Los recíprocos de estos números son:

$\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{14-x}$ respectivamente

Según los datos del problema se tiene que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{14-x} = \frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{24(14-x)+24x}{24x(14-x)}=\frac{7x(14-x)}{24x(14-x)}$$

$$\Rightarrow 336-24x+24x=98x-7x^2$$

$$\Rightarrow -7x^2+98x-336=0$$

$$\Rightarrow x^2-14x+48=0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x-6)=0$$

$$\Rightarrow x=8 \text{ o } x=6$$

a) si $x=8 \Rightarrow 14-x=6$

b) si $x=6 \Rightarrow 14-x=8$

RESPUESTA: los números buscados son 6 y 8

Verificación:

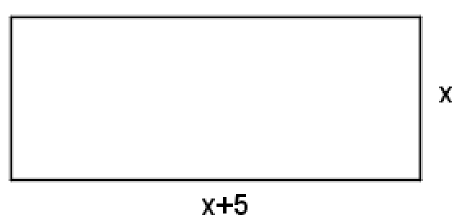
Note que $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$ y $6+8=14$. Es decir, se cumplen las condiciones planteadas en el problema.

Problemas geométricos

Problema 20

Solución:

La figura que representa el problema es:



Si x representa el ancho, en pies, entonces $x+5$ representa el largo.

Además se sabe que el área de dicho cuarto, en pies cuadrados, está dada por $A=x(x+5)$**; y** el perímetro, en pies, por $P=2x+2(x+5)$.

Como el área excede al perímetro en100, entonces se tiene que $A=P+100$**.**

Sustituyendo en la última igualdad obtiene:

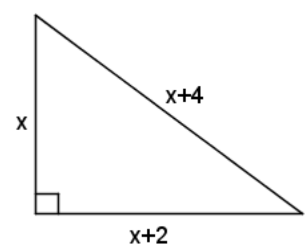
$x(x+5)=2x+2(x+5)+100$
$\Rightarrow x^2+5x=2x+2x+10+100$
$\Rightarrow x^2+5x=4x+110$
$\Rightarrow x^2+5x-4x-110=0$
$\Rightarrow x^2+x-110=0$
$\Rightarrow (x-10)(x+11)=0$
$\Rightarrow x=10 \text{ o } x=-11$
Como la longitud debe ser un número positivo, el valor de x que se utiliza en este problema es 10.

RESPUESTA: El ancho del cuarto mide 10 pies y el largo 15 pies.

NOTA: Observe que A = 150 y P = 50 por lo que se satisface que $A = P + 100$.

Problema 21

Solución:
Un dibujo que representa el enunciado es:



Donde x representa un número par correspondiente a la medida de uno de los lados del triángulo, por lo que los números pares consecutivos son $x+2$ y $x+4$ que serían las medidas de los otros lados del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que $(x+4)^2 = x^2 + (x+2)^2$
Así,
$(x+4)^2 = x^2 + (x+2)^2$
$\Rightarrow x^2+8x+16=x^2+x^2+4x+4$
$\Rightarrow x^2+8x+16=2x^2+4x+4$
$\Rightarrow x^2-2x^2+8x-4x+16-4=0$
$\Rightarrow -x^2+4x+12=0$
$\Rightarrow -(x+2)(x-6)=0$
$\Rightarrow x=-2 \;\; o \;\; x=6$
Como x representa la medida de uno de los lados de un triángulo, el valor de x que se utiliza en este problema es 6.

RESPUESTA: las longitudes de los lados del triángulo son 6, 8 y 10.

Problema 22

<u>Solución</u>:

Sea x la medida del ancho

$x+2$: Largo del rectángulo.

Como el área es $360m^2$ se tiene

$$x\left(x+2\right)=360$$

$$\Rightarrow \quad x^2+2x-360=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(x-18\right)\left(x+20\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-20 \quad \text{o} \quad x=18$$

Como el ancho es un número positivo se tiene que su medida es 18 m. Por lo tanto, el largo es 20 m y el perímetro es

$P=2\cdot 18+2\cdot 20=76$

RESPUESTA: el perímetro es $76m$

Problema 23

<u>Solución</u>:

Recuerde que en un cubo, $volumen=\left(arista\right)^3$

Sea x la medida de la arista del cubo más pequeño.

$x+2$: La medida de la arista del otro cubo.

x^3:volumen del cubo más pequeño

$\left(x+2\right)^3$ volumen del otro cubo

Entonces:

$\left(x+2\right)^3-x^3=98$ diferencia de los cubos

$\Rightarrow x^3+3x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3-x^3=98$

$\Rightarrow 6x^2+12x+8=98$

$\Rightarrow 6x^2+12x-90=0$

$\Rightarrow x^2+2x-15=0$

$\Rightarrow (x+5)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=3 \quad \text{o} \quad x=-5$

Como la medida de la arista es positivo se tiene que $x=3$

RESPUESTA: las medidas de las aristas son 3 y 5 respectivamente

Problema 24

<u>Solución</u>:

Sea x la altura del rectángulo y $2x+4$ la base del rectángulo

Además se sabe que el área de un rectángulo está dada por la fórmula $A=b\cdot h$ (donde b es la base del rectángulo y h su altura). Entonces sustituyendo las medidas en la fórmula $A=b\cdot h$; se obtiene:

$\Rightarrow 448=(2x+4)\cdot x$

$\Rightarrow 448=2x^2+4x$

$\Rightarrow 448=2\left(x^2+2x\right)$

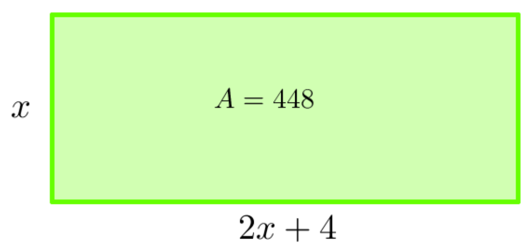
$\Rightarrow \dfrac{448}{2}=\dfrac{2\left(x^2+2x\right)}{2}$

$\Rightarrow 224=x^2+2x$

$\Rightarrow 0=x^2+2x-224$

$\Rightarrow 0=(x-14)(x+16)$

$\Rightarrow x=14 \quad \text{o} \quad x=-16$



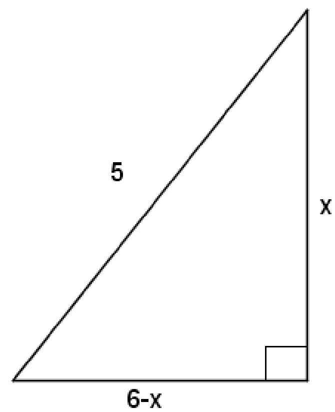
Como la longitud de los lados debe estar dada por números positivos, la solución que sirve es $x=14$. Luego sustituyendo el valor encontrado para x en la expresión $2x+4$, se obtiene que la base del rectángulo es 32 pies.

RESPUESTA: Las dimensiones del rectángulo son 14 pies y 32 pies.

Problema 25

Solución:

Sea x la medida del cateto mayor, entonces $6-x$ es la medida del cateto menor. Por el teorema de Pitágoras se tiene que:



$$5^2 = x^2 + (6-x)^2$$
$$\Rightarrow 25 = x^2 + 36 - 12x + x^2$$
$$\Rightarrow 2x^2 - 12x + 11 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{12+\sqrt{56}}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{12-\sqrt{56}}{4}$$
$$\Rightarrow x = \frac{6+\sqrt{14}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{6-\sqrt{14}}{2}$$

$a = 2$

$b = -12$ $\qquad \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11$

$c = 11$ $\qquad \Delta = 56$

Ahora bien, como x es el cateto mayor, entonces debe tomarse $\Rightarrow x = \frac{6+\sqrt{14}}{2}$

Entonces:

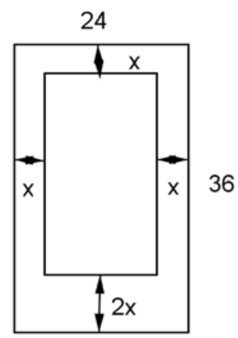
- Si $x = \frac{6+\sqrt{14}}{2} \Rightarrow 6 - x = 6 - \frac{6+\sqrt{14}}{2} = \frac{6-\sqrt{14}}{2}$

Luego, el cateto mayor mide $\frac{6+\sqrt{14}}{2}$ y el cateto menor mide $\frac{6-\sqrt{14}}{2}$

RESPUESTA: las medidas de los catetos son $\frac{6+\sqrt{14}}{2}$ y $\frac{6-\sqrt{14}}{2}$.

Problema 26

Solución:



Sea : x El ancho de los márgenes laterales y superior (en pulgadas).

Note que como las dimensiones de la hoja son 24 x 36, x debe ser menor que 12.

$2x$: El ancho del margen inferior

$36-3x$: Alto del área por imprimir

$24-2x$: Ancho del área por imprimir

Como el área por imprimir es $661,5$ se tiene que

$$(36-3x)(24-2x)=661,5$$

$$\Rightarrow \ 864-72x-72x+6x^2=\frac{1323}{2} \quad \text{note que } 661,5=\frac{1323}{2}$$

$$\Rightarrow \ 6x^2-144x+864=\frac{1323}{2}$$

$$\Rightarrow \ 12x^2-288x+1728=1323$$

$$\Rightarrow \ 12x^2-288x+405=0$$

$$\Rightarrow \ 4x^2-96x+135=0$$

$$\Rightarrow \ (2x-45)(2x-3)=0$$

$$\Rightarrow \ x=\frac{45}{2} \quad \text{o} \quad x=\frac{3}{2}$$

Como x tiene que ser menor que 12 y $\frac{45}{2}=22,5$, entonces $x=\frac{3}{2}$ y la región impresa tendría como dimensiones 31,5 por 21 pulgadas.

RESPUESTA: El margen superior deberá ser de 1,5 pulg y el inferior 3 pulg.

Problema 27

Solución:

Sea x la medida del ancho del camino. Entonces:

Área total = área del camino + área del terreno

$\Rightarrow (30+2x)(26+2x) = 240+30\cdot 26$

$\Rightarrow 780+60x+52x+4x^2 = 1020$

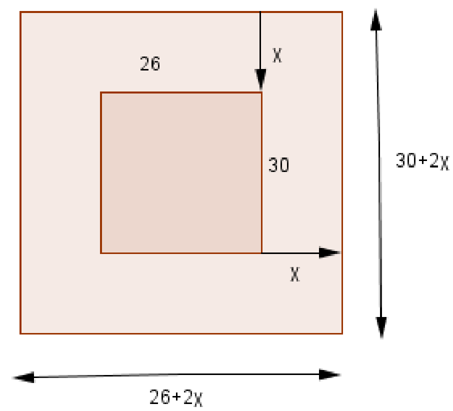
$\Rightarrow 4x^2+112x-240=0$

$\Rightarrow x^2+28x-60=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+30)=0$

$\Rightarrow x=2, \quad x=-30$

Como el ancho del camino no puede ser negativo, se tiene que $x=2$.



RESPUESTA: el ancho del camino mide 2 metros.

Problema 28

Solución:

El volumen del cilindro es $V=\pi r^2 h$ donde r es el radio y h es la altura.

Según los datos del problema: $V=3000$, $h=20$ y r es la medida que se debe encontrar.

Entonces $3000=\pi r^2\cdot 20$

$\Rightarrow \pi r^2 = 150$

$\Rightarrow r=\sqrt{\dfrac{150}{\pi}} \approx 6,90$

RESPUESTA: El radio de la base de la lata es $\sqrt{\dfrac{150}{\pi}}$ cm, aproximadamente $6,90$ cm.

Problema 29

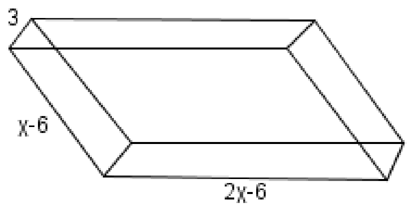
Solución:

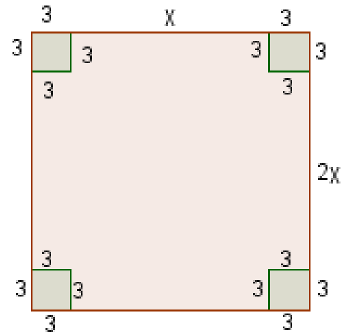
Sea x el ancho de la hoja de la lata, entonces el largo de la hoja es $2x$. Así,

$x-6$ es el ancho de la caja

$2x-6$ es el largo de la caja

3 es la altura de la caja





Dado que el volumen de la caja es el producto de su ancho, altura y largo, se tiene $V=3(x-6)(2x-6)$, donde además se quiere que el volumen sea de 60 pulg^3.

$\Rightarrow 60=3\left(2x^2-6x-12x+36\right)$

$\Rightarrow 20=2x^2-6x-12x+36$

$\Rightarrow 2x^2-18x+16=0$

$\Rightarrow x^2-9x+8=0$

$\Rightarrow (x-1)(x-8)=0$

$\Rightarrow x=1, \quad x=8$

Pero x no puede ser 1 (el largo y el ancho serían negativos) entonces $x = 8$

RESPUESTA: El tamaño de la hoja que producirá una caja con volumen de 60 pulg^3 es de 8 por 16 pulgadas.

Problema 30

<u>Solución</u>:

Sea x la longitud del pedazo más corto en que se divide el trazo de alambre, entonces la otra parte mide $100 - x$.

Luego, cada lado de uno de los lados del primer cuadrado mide $\frac{x}{4}$ y cada lado del otro cuadrado mide $\frac{100-x}{4}$.

Al considerar sus áreas, se tiene que

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = 397$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{16} + \frac{10000 - 200x + x^2}{16} = 397$$

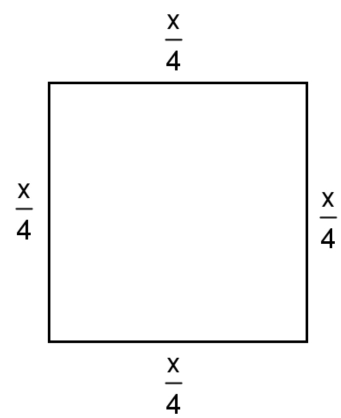
$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 200x + 10000 = 6352$$

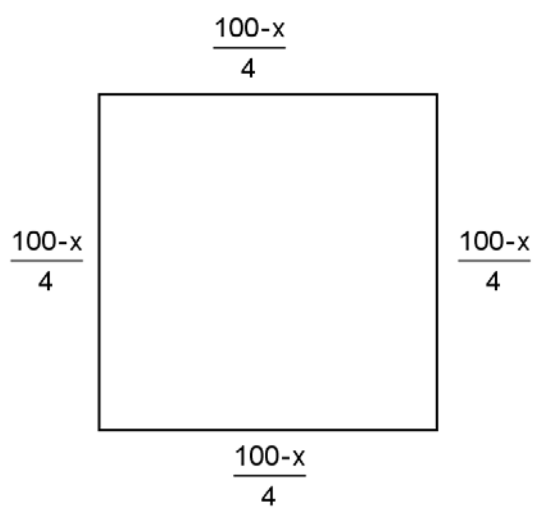
$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 200x + 3648 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 100x + 1824 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x - 76)(x - 24) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 76, \qquad x = 24$$





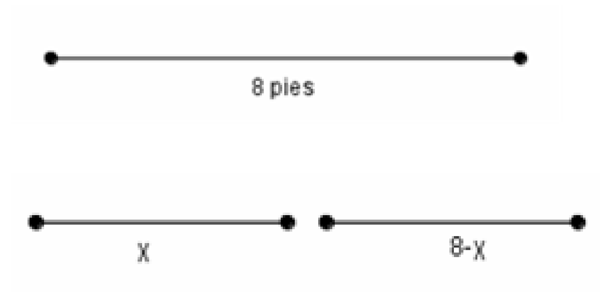
RESPUESTA: 24 es la longitud del pedazo más corto y 100 – 24 = 76 es la longitud del pedazo más largo.

Problema 31

<u>Solución</u>:

Sea x la longitud de uno de los pedazos.

$8-x$ es entonces la longitud del otro pedazo.



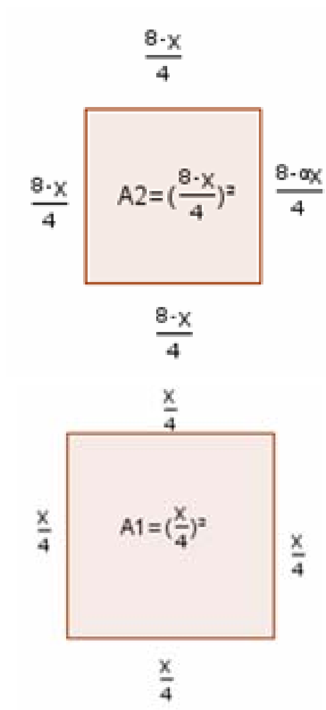
Como cada pieza de alambre se cortará para formar un cuadrado (recuerde que en un cuadrado los lados tienen la misma longitud), entonces se tiene que:

a) Con el trozo de alambre de longitud x, cada uno de los lados del cuadrado formado tiene una longitud de $\frac{x}{4}$, y el área de la región limitada por dicho cuadrado está dada por $A_1 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$

b) Con el trozo de alambre de longitud $8-x$**,** cada uno de los lados del cuadrado tiene una longitud de $\frac{8-x}{4}$ y el área de la región limitada por este cuadrado está dada por $A_2 = \left(\frac{8-x}{4}\right)^2$

Como la suma de las áreas de los cuadrados formados es 2, se tiene que $A_1 + A_2 = 2$

Sustituyendo A_1 y A_2 , se obtiene

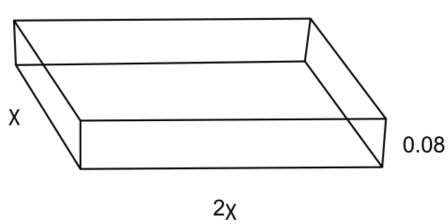


$$\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{8-x}{4}\right)^2=2$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{(8-x)^2}{4^2}=2$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{64-16x+x^2}{16}=2$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{64-16x+x^2}{16}-2=0$$
$$\Rightarrow \frac{x^2+64-16x+x^2-32}{16}=0$$
$$\Rightarrow x^2+x^2-16x+64-32=0$$
$$\Rightarrow 2x^2-16x+32=0$$
$$\Rightarrow 2\left(x^2-8x+16\right)=0$$
$$\Rightarrow x^2-8x+16=0$$
$$\Rightarrow (x-4)^2=0$$
$$\Rightarrow x-4=0$$
$\Rightarrow x=4$ (el cuadrado de un número es cero si y sólo si el número es cero)

RESPUESTA: El alambre debe cortase a la mitad. Por lo tanto cada pedazo tiene que medir 4 pies.

Problema 32

Solución:



Sea x el ancho del piso, entonces $2x$ es el largo. Como $8cm=0,08m$ y el volumen del piso en este caso, está dado por el producto de sus tres dimensiones, entonces
$$x\cdot 2x\cdot 0,08=6$$
$$\Rightarrow 2x^2\cdot\frac{2}{25}=6$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{75}{2}$$

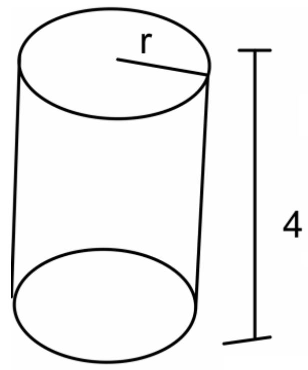
$$\Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{-5}{2}\sqrt{6}$$

RESPUESTA: las dimensiones son $250\sqrt{6}\ cm,\ 500\sqrt{6}\ cm$ y 8 *cm.*

Problema 33

Solución:

Sea *r* el radio del barril entonces el área total es



$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 4$$

$$\Rightarrow 10\pi = 2\pi r^2 + 8\pi r$$

$$\Rightarrow 5 = r^2 + 4r$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r+5) = 0$$

$$\Rightarrow r = 1 \quad o \quad r = -5$$

RESPUESTA: El radio debe ser 1 pie y el diámetro 2 pies.

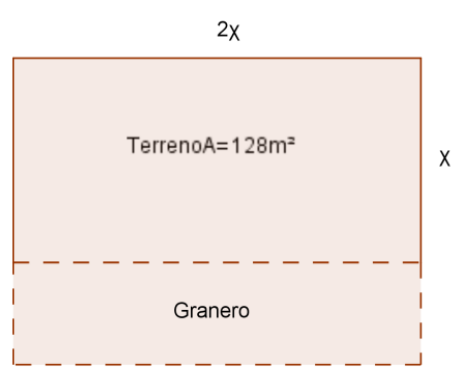
Problema 34

Solución:

Sea *x* la medida de los lados menores del terreno y 2*x* la medida del lado paralelo al granero. De esta manera, la longitud del terreno que se quiere cercar es $x + x + 2x$.

Como el terreno es rectangular, se sabe que su área se obtiene al multiplicar largo por ancho. Es decir $A = 2x \cdot x$

Sustituyendo el valor del área del terreno, se tiene:



$$128 = 2x \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad 128 = 2x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{128}{2} = \frac{2x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 64 = x^2$$

$\Rightarrow \qquad \sqrt{64} = \sqrt{x^2}$

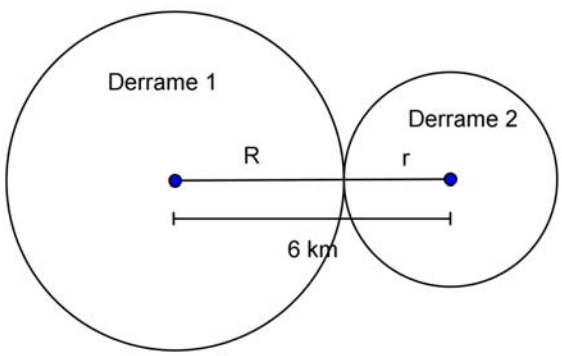
$\Rightarrow \qquad x = 8 \;\; \text{o} \;\; x = -8$

Existen 2 posibles valores para *x*, pero como se está haciendo referencia a la medida del lado de un terreno, el valor de *x* que se debe utilizar es 8.
Entonces se tiene que las medidas de los lados del terreno que se quieren cercar son 8m, 8m, 16m.

RESPUESTA: se necesitarían 8m + 8m + 16m = 32m de malla para cercar dichos lados del terreno.

Problema 35

<u>Solución</u>:



Sean

A_T: la suma de las áreas totales de los derrames

A_1: el área del derrame 1

A_2: el área del derrame 2

R : el radio del derrame 1

r : el radio del derrame 2

Se sabe que:

$R + r = 6 \Rightarrow R = 6 - r$

$A_T = 20\pi$

$A_T = A_1 + A_2$

$A_T = R^2\pi + r^2\pi$

Entonces:

$\Rightarrow \qquad A_T = R^2\pi + r^2\pi$

$\Rightarrow \qquad 20\pi = (6 - r)^2\, \pi + r^2\pi$

$\Rightarrow \qquad 20\pi = 36\pi - 12r\pi + r^2\pi + r^2\pi$

$\Rightarrow \qquad 20\pi = 2\pi\left(r^2 - 6r + 18\right)$

$\Rightarrow \qquad 10 = r^2 - 6r + 18$

$\Rightarrow \qquad 0 = r^2 - 6r + 8$

$\Rightarrow \qquad 0 = (r-4)(r-2)$

$\Rightarrow \qquad r = 4$ o $r = 2$

Luego como $R = 6 - r$, sustituyendo los 2 posibles valores de r obtenidos anteriormente se tiene que $R = 2$ o $R = 4$.

RESPUESTA: Se puede asegurar que los radios de cada uno de los derrames miden 4km y 2km.

Problema 36

<u>Solución</u>:

Sean

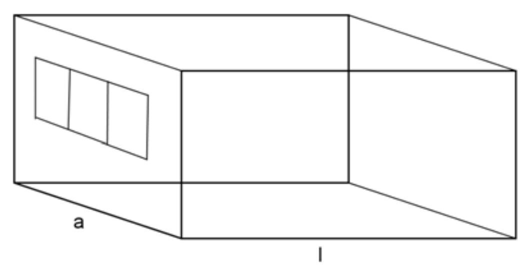
l: largo de la base del edificio.

a: ancho de la base del edificio

p: perímetro de la base del edificio

A: área de la base del edificio

Se sabe que $p = 2l+2a$ y $A = al$; además que $p=300m$ y $A = 5400\text{m}^2$.



Entonces:

$300 = 2a + 2l$

$\Rightarrow 150 = a + l$

$\Rightarrow a = 150 - l$ (*)

Como $5400 = a \cdot l$

$\Rightarrow 5400 = (150 - l)l$ sustituyendo (*)

$\Rightarrow 5400 = 150l - l^2$

$\Rightarrow l^2 - 150l + 5400 = 0$

$\Rightarrow (l-90)(l-60) = 0$

Entonces $l = 90$ o $l = 60$

Como $\Rightarrow a = 150 - l$, sustituyendo los valores de l obtenidos anteriormente, se tiene que $a = 60$ o $a = 90$

RESPUESTA: las dimensiones de la base del edificio son 60 x 90 metros.

Problema 37

<u>Solución</u>:
Sean:
A: área del triángulo

b: base del triángulo

$h = b + 7$: altura del triángulo

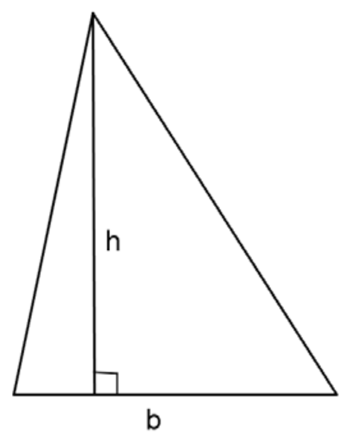
Entonces $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$\Rightarrow \; 30 = \dfrac{b \cdot (b+7)}{2}$

$\Rightarrow \; 60 = b^2 + 7b$

$\Rightarrow \; b^2 + 7b - 60 = 0$

$\Rightarrow \; (b-5)(b+12) = 0$



Entonces $b = 5$ o $b = -12$. Pero como se trata de la medida de un lado de un triángulo, esta no puede ser negativa. Por lo cual $b = 5$.

RESPUESTA: Las dimensiones de la base y la altura son 5 pies y 12 pies, respectivamente.

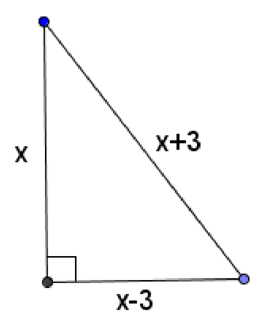
Problema 38

<u>Solución</u>:

Sean:
x: la medida del lado mediano.

$x - 3$: la medida del lado pequeño.

$x + 3$: la medida de la hipotenusa.



Por el teorema de Pitágoras se tiene que: $(x+3)^2 = (x-3)^2 + x^2$

$\Rightarrow \; x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + x^2$

$\Rightarrow \; 0 = x^2 - 12x$

$\Rightarrow \; 0 = x(x-12)$

$\Rightarrow \; x = 0 \quad \text{o} \quad x = 12$

Pero como se trata de la medida del lado de un triángulo, entonces $x = 12$.
Finalmente sustituyendo $x = 12$ en las otras medidas de los lados se obtiene:

- Lado menor: $x - 3 = 9$
- Hipotenusa: $x + 3 = 15$

RESPUESTA: las medidas de los lados son 9,12 y 15

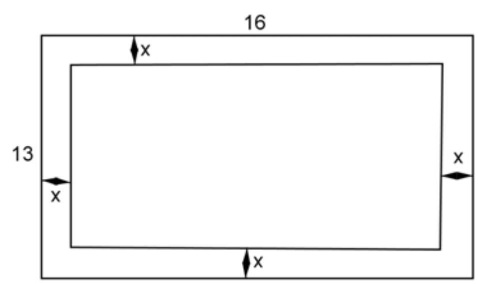
Problema 39

<u>Solución</u>:

Sean:
x el ancho uniforme a cada lado de la sala que no se va a alfombrar.
$16-2x$ el largo de la alfombra.
$13-2x$ el ancho de la alfombra.
Notas:

1. x debe ser un número positivo y como el ancho de la sala es 13 pies, x debe ser menor que $6,5$ pies.

2. A cada lado de la sala queda descubierta una región de ancho x por lo tanto al ancho y al largo de la sala se le debe restar un total de $2x$ para obtener el ancho y el largo de la alfombra.



Luego, como la alfombra es rectangular y su área es de 108 pies^2, entonces se tiene que:
$108 = (13-2x)(16-2x)$

$\Rightarrow \ 108 = 208 - 26x - 32x + 4x^2$

$\Rightarrow \ 0 = 4x^2 - 26x - 32x + 208 - 108$

$\Rightarrow \ 0 = 4x^2 - 58x + 100$

$\Rightarrow \ 0 = 2x^2 - 29x + 50$

$\Rightarrow \ 0 = (x-2)(2x-25)$

$\Rightarrow \ x = 2 \ \text{ o } \ x = 12{,}5$

Como *x* representa la medida del borde que no se alfombra a cada lado de la sala y, según la nota 1, debe ser menor que 6,5, entonces el único valor que sirve es $x = 2$.

RESPUESTA: las dimensiones de la alfombra son 9 pies de ancho y 12 pies de largo.

Problema 40

<u>Solución</u>:

La información suministrada se puede representar mediante la siguiente figura.

Donde los catetos son x y $2x + 4$.

Entonces, de su área se tiene:

$$120 = \frac{(2x+4)x}{2}$$

$$\Rightarrow 120 = \frac{2x^2 + 4x}{2}$$

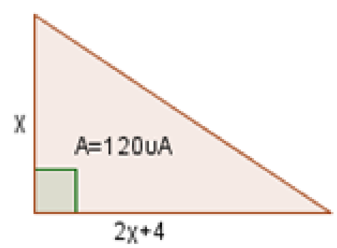
$$\Rightarrow 120 = \frac{2(x^2 + 2x)}{2}$$

$$\Rightarrow 120 = x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 0 = x^2 + 2x - 120$$

$$\Rightarrow 0 = (x-10)(x+12)$$

$$\Rightarrow x = 10 \ \text{ o } \ x = -12$$



Como la longitud de cada lado debe estar dada por un número positivo, la solución que sirve es $x = 10$**.** Ahora, sustituyendo el valor encontrado para *x* en la expresión $2x + 4$ se obtiene que el otro cateto mide 24**.**

Aplicando el Teorema de Pitágoras se determina la hipotenusa m.

$$m^2 = (2x+4)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow m^2 = (2 \cdot 10 + 4)^2 + 10^2$$

$\Rightarrow m^2 = 24^2 + 10^2$

$\Rightarrow m^2 = 576 + 100$

$\Rightarrow m^2 = 676$

$\Rightarrow m = 26$ o $m = -26$

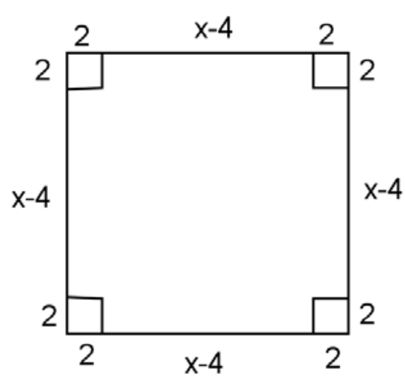
Como *m* representa un número positivo se tiene que *m* = 26.

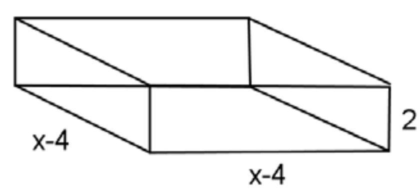
RESPUESTA: Se tiene que las medidas de los lados del triángulo son 10ul, 24ul y 26ul.

Problema 41

<u>Solución</u>:

Sea x lo que mide el lado de la cartulina cuadrada





Como el volumen es $V = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}$

Se tiene que $(x-4)(x-4) \cdot 2 = 50$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 25$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-9) = 0$

$\Rightarrow x = -1$ o $x = 9$

Otra forma de resolver esta ecuación es:

$(x-4)(x-4) \cdot 2 = 50$

$\Rightarrow (x-4)(x-4) = 25$

$\Rightarrow (x-4)^2 = 25$

$\Rightarrow x - 4 = 5$ o $x - 4 = -5$

$\Rightarrow x = 9$ o $x = -1$

Como x representa una medida, se debe cumplir que $x = 9$.

RESPUESTA: el lado de la cartulina mide $9\ cm$.

Verificación de la respuesta obtenida: Como el lado de la cartulina mide $9cm$, el largo y el ancho de la base mide $5cm$ (se recortan $2cm$ en cada esquina), la altura es $2cm$ (la cual se evidencia al doblar la caja) entonces el volumen es

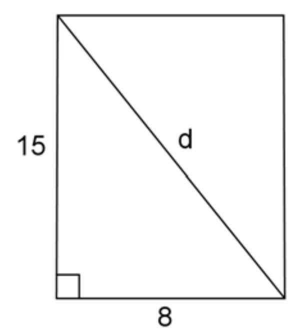
$V = 5 \cdot 5 \cdot 2$

$V = 50cm^2$ Que es lo que dice el enunciado

Problema 42

<u>Solución</u>:

Por el teorema de Pitágoras:



$d^2 = 15^2 + 8^2$

$\Rightarrow d^2 = 289$

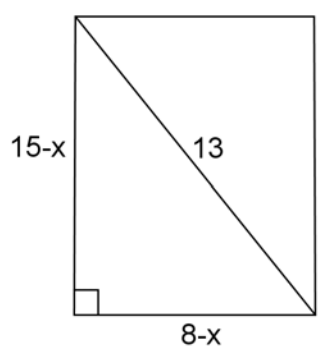
$\Rightarrow d = 17$ o $d = -17$

Como d representa la medida de la diagonal se debe cumplir que $d = 17$

Sea x la medida que se le debe disminuir al ancho y al largo del rectángulo simultáneamente

Como se quiere disminuir 4 a la diagonal (es decir 17-4=13), entonces se tiene la siguiente figura:

Luego por el teorema de Pitágoras se tiene que



$(8-x)^2 + (15-x)^2 = 13^2$

$\Rightarrow 64 - 16x + x^2 + 225 - 30x + x^2 = 169$

$\Rightarrow 2x^2 - 46x + 120 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 23x + 60 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-20) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ o $x = 20$

Note que x es lo que se le va a restar al ancho y al largo, entonces no puede ser 20 porque el ancho mide 8 (lo mismo sucede con el largo, que originalmente mide 15).

Se debe cumplir entonces que $x = 3$

RESPUESTA: habría que disminuir el ancho y el largo en $3cm$.

Verificación: si se disminuye el ancho y el largo en $3cm$ las medidas serian: largo = 12 y ancho = 5, por lo que la diagonal mediría

$d^2 = 12^2 + 5^2$

$d^2 = 169$

$d = 13$ o $d = -13$

Note que $d = 13$ corresponde a $4cm$ menos de la medida de la diagonal del rectángulo original (que mide 17 cm), como lo dice el enunciado del problema

Problema 43

Solución:

Sean x: la medida del lado de un cuadrado
y: la medida del lado del otro cuadrado

	Lado	**Perímetro**	**Área**
Cuadrado 1	x	$4x$	x^2
Cuadrado 2	y	$4y$	y^2

Entonces, al sumar los perímetros y las áreas respectivamente, se tiene que:

a) $4x+4y=240$

$\Rightarrow 4x=240-4y$

$\Rightarrow x=\dfrac{240-4y}{4}$

$\Rightarrow x=60-y$

b) $x^2+y^2=2522$

$\Rightarrow (60-y)^2+y^2=2522$ (sustituyendo $x=60-y$)

$\Rightarrow 3600-120y+y^2+y^2=2522$

$\Rightarrow 2y^2-120y+1078=0$

$\Rightarrow y^2-60y+539=0$

$\Rightarrow (y-11)(y-49)=0$

$\Rightarrow y=11$ o $y=49$

Si $y=11 \Rightarrow x=49$

Si $y=49 \Rightarrow x=11$

RESPUESTA: las medidas de los lados de cada cuadrado son $11cm$ y $49cm$

Verificación:

	Lado	**Perímetro**	**Área**
Cuadrado 1	11	44	121
Cuadrado 2	49	196	2401

Note que se cumplen las 2 condiciones dadas en el problema, pues la suma de los perímetros es 240 cm y la suma de las áreas es 2 522 cm^2.

Problema 44

Solución:

En la figura:

$\overline{AD}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre la hipotenusa

$\overline{DC}$ es la proyección de $\overline{BC}$ sobre la hipotenusa

Y por los derivados de Pitágoras se tiene:

$(AB)^2 = AD \cdot AC$

$\Rightarrow (60)^2 = (x + x - 21) \cdot (x - 21)$

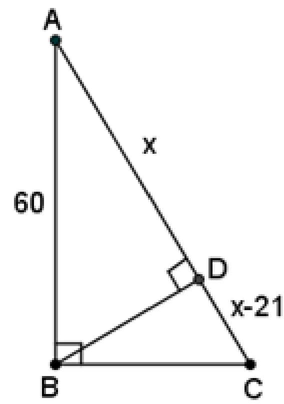
$\Rightarrow 3600 = (2x - 21) \cdot (x - 21)$

$\Rightarrow 3600 = 2x^2 - 21x - 42x + 441$

$\Rightarrow 2x^2 - 63x - 3159 = 0$

$\Rightarrow (2x - 117)(x + 27) = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{117}{2}$ o $x = -27$



Como x representa una medida, debe ser positivo, es decir $x = \dfrac{117}{2}$ entonces $DC = 58,5$ y $AC = 96$. Ahora, por el teorema de Pitágoras:

$\Rightarrow 96^2 = (BC)^2 + 60^2$

$\Rightarrow 9216 = (BC)^2 + 3600$

$\Rightarrow 5616 = (BC)^2$

$\Rightarrow BC = 12\sqrt{39}$ ($BC = -12\sqrt{39}$ se descarta porque BC representa la medida de un segmento)

RESPUESTA: Las medidas de los otros dos lados son $12\sqrt{39}$ y 96.

Problema 45

<u>Solución</u>:

Sea x la medida de la proyección del cateto mayor sobre la hipotenusa

Por los derivados de Pitágoras se tiene que:

$$(BC)^2 = AC \cdot DC$$

$$42^2 = (2x-98)(x-98)$$

$$\Rightarrow 1764 = 2x^2 - 98x - 196x + 9604$$

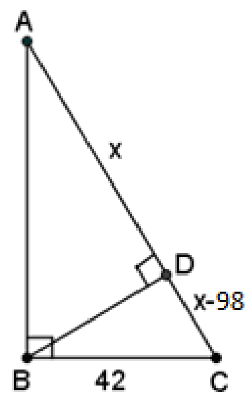
$$\Rightarrow 2x^2 - 294x + 7840 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 147x + 3920 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{147 \pm \sqrt{5929}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{147 + \sqrt{5929}}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{147 - \sqrt{5929}}{2}$$

$$\Rightarrow x = 112 \quad \text{o} \quad x = 35$$



Nota:	$\Delta = (-147)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3920$
$a = 1$	$\Delta = 21609 - 15680$
$b = -147$	$\Delta = 5929$
$c = 3920$	

Note que x <u>no</u> puede ser 35 dado que DC sería negativo $(35-98)$. Entonces se debe cumplir que $x = 112$ y como $AC = 2x - 98 \Rightarrow AC = 126$

RESPUESTA: la hipotenusa mide 126 cm

Problema 46

Solución:

Sea x la medida de la altura sobre la hipotenusa.

$x+8$: La medida de cada cateto.

$BC=\dfrac{19}{2}$ porque la base del triángulo es 19 cm y al ser isósceles B es el punto medio de la base

Por el teorema de Pitágoras:

$(AC)^2=(BC)^2+(AB)^2$

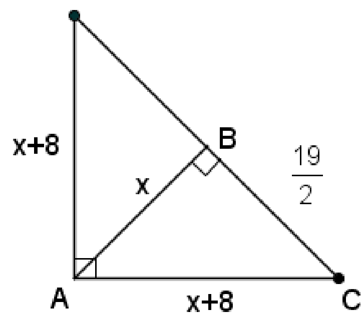
$\Rightarrow (x+8)^2=\left(\dfrac{19}{2}\right)^2+x^2$

$\Rightarrow x^2+16x+64=x^2+\dfrac{361}{4}$

$\Rightarrow 4x^2+64x+256=4x^2+361$

$\Rightarrow 64x=105$

$\Rightarrow x=\dfrac{105}{64}$



RESPUESTA: la medida de la altura sobre la hipotenusa es $\dfrac{105}{64}$ cm.

Problemas de mezclas

Problema 47

Solución:

Sea x la cantidad de ácido, en mililitros, que se debe agregar. Se tiene la siguiente información:

	Mezcla original	**Ácido puro**	**Nueva mezcla**
Cantidad de líquido	10	x	$10+x$
Porcentaje de ácido	30%	100%	50% (lo que se quiere que tenga)
Cantidad de ácido	3	x	$3+x$

Recuerde que la cantidad de ml de ácido presente en una mezcla depende de su porcentaje de concentración y se encuentra realizando el producto entre la cantidad de ml de la mezcla original y el porcentaje de concentración del ácido: $30\%\cdot 10=\frac{30}{100}\cdot 10=3$. Según las condiciones del problema, la cantidad de ácido de la nueva mezcla debe ser el 50% de la nueva mezcla, entonces se debe cumplir que:

$$3+x=50\%\left(10+x\right)$$

$$\Rightarrow 3+x=0,5\left(10+x\right) \quad \text{recuerde que } 50\%=\frac{50}{100}=0,5$$

$$\Rightarrow 3+x=5+\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2\left(3+x\right)}{2}=\frac{10+x}{2}$$

$$\Rightarrow 2\left(3+x\right)=10+x$$

$$\Rightarrow 6+2x=10+x$$

$$\Rightarrow 2x-x=10-6$$

$$\Rightarrow x=4$$

El resultado de la ecuación es la cantidad de ácido buscada..

RESPUESTA: se debe agregar 4 ml de ácido puro a la solución original.

Verificación: observe que si se agregan 4 ml de ácido a la solución dada, la nueva solución tendrá 14 ml, 7 de los cuales son de ácido puro. Esto da la concentración deseada de 50%.

Problema 48

Solución:

Sea x la cantidad de mezcla (en litros) que debe eliminarse para reemplazarla por anticongelante.

	Mezcla original	**Mezcla a eliminar**	**Anticongelante a agregar**	**Nueva mezcla**
Cantidad de agua y anticongelante	8	x	x	8
Porcentaje de anticongelante	40%	40%	100%	60% (lo que se quiere que tenga)
Cantidad de anticongelante	3,2	$0,4x$	x	$4,8$

Recuerde que la cantidad de anticongelante (en litros) presente en la mezcla se encuentra multiplicando la cantidad de líquido original (en litros) por el porcentaje de concentración del anticongelante. Así, lo que se tenía inicialmente era $40\% \cdot 8 = 0,4 \cdot 8 = 3,2$, mientras que lo que se desea que tenga es $60\% \cdot 8 = 0,6 \cdot 8 = 4,8$. Además, note que al remplazar los x litros de mezcla por los x litros de anticongelante puro, la nueva mezcla tendrá $3,2 - 0,4x + x$ litros de anticongelante, lo cual debe ser igual al 60% de 8. (Recuerde que la cantidad de mezcla no cambia, solamente se sustituye por anticongelante).

Entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$3,2 - 0,4\,x + x = 4,8$$

$$\Rightarrow 0,6\,x = 1,6$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{3} \approx 2,67$$

RESPUESTA: se requiere eliminar $\frac{8}{3}$ de litro de la mezcla original y remplazarlo con anticongelante.

Verificación: observe que la cantidad de anticongelante en la mezcla original de 8 litros era 3,2 litros y por lo tanto quedan $3,2 - 0,4 \cdot \frac{8}{3}$ litros de anticongelante. Si luego se le agrega $\frac{8}{3}$ litros de anticongelante puro, la cantidad de anticongelante en la mezcla final es $3,2-0,4\cdot\frac{8}{3}+\frac{8}{3}$ litros. Es decir $4,8$ litros, que es el 60% de 8.

Problema 49

<u>Solución</u>:

Sea x la cantidad de libras de café tipo A que deben mezclarse.

Se tiene lo siguiente.

	Tipo A	**Tipo B**	**mezcla**
Libras de café	x	140	$140+x$
Costo por libra	1250	1750	1600
Costo total	$1250x$	245000	$1600(140+x)$

Entonces se debe cumplir que: $1250x+245000=1600(140+x)$

$$\Rightarrow\ 1250x+245000=224000+1600x$$
$$\Rightarrow\ 21000=350x$$
$$\Rightarrow\ x=60$$

RESPUESTA: se deben mezclar 60 libras de café del tipo A con las 140 libras del tipo B para que la mezcla cueste 1600 colones la libra.

Problema 50

Solución:

Sea x la cantidad de galones que se deben combinar.

Se tiene lo siguiente:

	líquido 1	**líquido 2**	**Mezcla**
Cantidad de galones de mezcla	x	5	$x+5$
% de alcohol	74%	90%	84%
Cantidad de galones de alcohol	$74\%\,x$	4,5	$84\%(x+5)$

Como la cantidad del alcohol del líquido 1 y la del líquido 2 será la misma que la de la mezcla, entonces se tiene que

$$74\%x + 4,5 = 84\%(x+5)$$

$$\Rightarrow\ 0,74x + 4,5 = 0,84(x+5)$$

$$\Rightarrow\ 0,74x + 4,5 = 0,84x + 4,2$$

$$\Rightarrow\ 0,3 = 0,1x$$

$$\Rightarrow\ x = 3$$

RESPUESTA: se deben combinar 3 galones

Problemas de velocidades

Para resolver este tipo de problemaa se utilizará la fórmula conocida en la Física que relaciona la distancia, tiempo y velocid1ad en un movimiento donde se asume una velocidad constante:

$$t = \frac{d}{v}$$

Problema 51

Solución:

a) Si $v = 55$, entonces la distancia de frenado es $d = 55 + \frac{(55)^2}{20}$

$\Rightarrow \ d = \frac{825}{4} = 206,25$ pies

b) Como $d = 120$ pies, se tiene que $120 = v + \frac{v^2}{20}$

$\Rightarrow \ \frac{2400}{20} = \frac{20v + v^2}{20}$

$\Rightarrow \ 2400 = 20v + v^2$

$\Rightarrow \ v^2 + 20v - 2400 = 0$

$\Rightarrow \ (v-40)(v+60) = 0$

$\Rightarrow \ v = 40 \quad \text{o} \quad v = -60$

Entonces como v es la velocidad a la cual se desplaza el automóvil entonces la solución tiene que ser un número positivo, es decir $v = 40$ millas por hora.

RESPUESTA: a) $206,25$ pies

b) La velocidad debe ser menor o igual que $40\ mi/h$ para que el vehículo logre detenerse al llegar a la señal de alto.

Problema 52

Solución:

Sea x el tiempo transcurrido desde la 1:00 pm hasta el momento en que el automóvil 2 alcanza al automóvil 1.

	Velocidad	**Tiempo trasnscurrido a partir de la 1:00 pm**	**Distancia recorrida**
Automóvil 1	40	x	$40x$
Automóvil 2	55	$x - \frac{1}{2}$ (ha viajado media hora menos que el automóvil 1)	$55\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Note que en el momento en el que el automóvil 2 alcanza al automóvil 1, ambos han recorrido la misma distancia, por lo tanto se forma la siguiente ecuación:

$$55\left(x-\frac{1}{2}\right)=40x$$

$$\Rightarrow 55x-\frac{55}{2}=40x$$

$$\Rightarrow 110x-55=80x$$

$$\Rightarrow 30x=55$$

$$\Rightarrow x=\frac{11}{6}$$

Es decir, 1 hora y $\frac{5}{6}$ de hora que equivale a y 1 hora y 50 minutos. Como el automóvil 1 salió a la 1 pm, el automóvil 2 lo alcanza a las 2:50 pm.

RESPUESTA: el automóvil 2 alcanza al automóvil 1 a las 2:50 pm.

Verificación: note que a las 2:50 pm el primer automóvil ha viajado durante $\frac{11}{6}$ horas y su distancia de A es $40\cdot\frac{11}{6}=\frac{220}{3}\approx 73,33$ kilómetros. A las 2:50 pm, el segundo ha viajado durante $\frac{11}{6}-\frac{1}{2}$ horas $=\frac{4}{3}$ horas y está a $55\cdot\frac{4}{3}=\frac{220}{3}\approx 73,33$ kilómetros de A. Por lo tanto se cumplen las condiciones requeridas en el problema.

Problema 53

Solución 1:

Sea x el tiempo de regreso en horas (se utiliza el tiempo medido en horas porque las velocidades están dadas en km/h).

$x+\frac{1}{5}$: El tiempo de ida $\left(12 \text{ min} = \frac{12}{60}\text{hora} = \frac{1}{5} \text{ hora}\right)$

V_1: Velocidad de ida

V_2: Velocidad de regreso.

d : Distancia entre los lugares en kilómetros.

Como velocidad= $\dfrac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$ se tiene

- $V_1 = \dfrac{d}{x+\frac{1}{5}} \Rightarrow 30 = \dfrac{d}{x+\frac{1}{5}} \Rightarrow d = 30\left(x+\frac{1}{5}\right)$
- $V_2 = \dfrac{d}{x} \Rightarrow 48 = \dfrac{d}{x} \Rightarrow 48x = d$

Entonces $30\left(x+\frac{1}{5}\right) = 48x$ (note que la distancia es la misma en ambos casos).

$$\Rightarrow \ 30x + 6 = 48x$$

$$\Rightarrow \ 6 = 18x$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{1}{3}$$

Es decir, la familia requiere de 20 minutos para regresar a la ciudad, mientras que para ir al lago tardan 32 minutos.

Ahora, como $48x = d \Rightarrow d = 16$

Solución 2:

	Distancia	Velocidad	Tiempo
Ida	d	30	$\dfrac{d}{30}$
Regreso	d	48	$\dfrac{d}{48}$

Como el tiempo de ida es 12 minutos, es decir $\frac{1}{5}$ de hora, mayor que el tiempo de regreso, entonces:

$$\frac{d}{30} - \frac{1}{5} = \frac{d}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{8d - 48 - 5d}{240} = 0$$

$$\Rightarrow 3d = 48$$

$$\Rightarrow d = 16$$

RESPUESTA: La distancia entre los lugares es 16 km.

Problema 54

<u>Solución 1</u>:

Sea x la velocidad a la que manejó los primeros10 km.
$x+10$: la velocidad a la que manejó los 25 km siguientes
t_1: Tiempo transcurrido en los primeros 10 km.
t_2: Tiempo transcurrido en los 25 km siguientes

Entonces:

- $x=\dfrac{10}{t_1}\Rightarrow t_1=\dfrac{10}{x}$
- $x+10=\dfrac{25}{t_2}\Rightarrow t_2=\dfrac{25}{x+10}$

Como en total manejó $45 \text{ min}=\dfrac{45}{60}$ hora $=\dfrac{3}{4}$ hora , se tiene que $t_1+t_2=\dfrac{3}{4}$

Es decir:

$$\frac{10}{x}+\frac{25}{x+10}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{40(x+10)+100x}{4x(x+10)}=\frac{3x(x+10)}{4x(x+10)}$$

$$\Rightarrow \frac{40x+400+100x-3x^2-30x}{4x(x+10)}=0 \quad \text{note que } x\neq 0 \quad \text{y } x\neq -10$$

$$\Rightarrow 3x^2-110x-400=0$$

$$\Rightarrow (3x+10)(x-40)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-10}{3} \quad \text{o} \quad x=40$$

Antes de dar las conclusiones, se propone otra manera de resolver el problema.

Solución 2:

	Distancia (en km)	Velocidad (en km/h)	Tiempo (en horas)
Primera parte	10	v	$\frac{10}{v}$
Segunda parte	25	$v + 10$	$\frac{25}{v+10}$

Como el tiempo total de recorrido fue de 45 minutos, es decir, $\frac{3}{4}$ de hora, se tiene que:

$$\frac{10}{v}+\frac{25}{v+10}=\frac{3}{4}$$

Note que es la misma ecuación planteada en la solución 1 donde las soluciones de la ecuación son $v=\frac{-10}{3}$ o $v=40$. Además, en este caso la velocidad corresponde a un valor positivo.Por lo tanto el valor de *v* que se utiliza para responder lo planteado en el problema es 40.

RESPUESTA: Ana manejó los primeros $10km$ a $40km/h$

Problema 55

Solución 1:

Sea x la velocidad en la carretera pavimentada.

$x-25$: Velocidad en el camino en medio del bosque.

d_1: Distancia recorrida en la carretera pavimentada.

d_2: Distancia recorrida en el camino en medio del bosque.

Entonces se tiene:

$$x=\frac{d_1}{4}\Rightarrow 4x=d_1$$

$$x-25=\frac{d_2}{3}\Rightarrow 3\left(x-25\right)=d_2$$

Como el recorrido es de 380 km., se debe cumplir que $d_1+d_2=380$, es decir:

$$4x+3\left(x-25\right)=380$$
$$4x+3x-75=380$$
$$7x=455$$

$x = 65$

Sustituyendo $x = 65$ en $4x = d_1$ y en $3(x-25) = d_2$ se tiene:

$d_1 = 260$ y $d_2 = 120$

Antes de dar las conclusiones, se propone otra manera de resolver el problema.

Solución 2:

	Distancia (en km)	Tiempo (en horas)	Velocidad (en km/h)
Primera parte	d	4	$\frac{d}{4}$
Segunda parte	$380-d$	3	$\frac{380-d}{3}$
Total	380	7	

Ahora, como la velocidad en la segunda parte fue 25 km/h menor que la velocidad en la primera parte, entonces

$$\frac{380-d}{3} = \frac{d}{4} - 25$$

$$\Rightarrow \frac{4(380-d) - 3d + 12 \cdot 25}{12} = 0$$

$$\Rightarrow 1520 - 7d + 300 = 0$$

$$\Rightarrow 1820 = 7d$$

$$\Rightarrow 260 = d$$

Por lo tanto, el primer recorrido fue de 260 km y el segundo de 120 km y la velocidad promedio de cada recorrido fue, respectivamente 65 $\frac{km}{h}$ y $40\ \frac{km}{h}$

RESPUESTA:

Velocidad en carretera pavimentada: 65 $\frac{km}{h}$

Distancia recorrida en carretera pavimentada: 260 $\frac{km}{h}$

Velocidad en el camino en medio del bosque: 40 $\frac{km}{h}$

Distancia recorrida en el camino en medio del bosque: $120\ km$

Problema 56

<u>Solución</u>:

x: velocidad en $\frac{km}{h}$ a la que rema el joven en agua tranquila

La velocidad de la corriente del río es $5\ \frac{km}{h}$

Distancia que rema: 1,2 km

Si *t* es el tiempo en que rema dicha distancia río abajo (en horas), entonces $t+\frac{1}{2}$ es el tiempo en que tarda en remarla río arriba (en contra de la corriente), pues al trabajar el tiempo en horas se debe considerar los 30 min como media hora.

$x+5$: Velocidad de la canoa río abajo.

$x-5$: Velocidad de la canoa río arriba.

De la Física se sabe que $v=\frac{d}{t}$ entonces

- Al remar río abajo: $x+5=\frac{1,2}{t} \Rightarrow x=\frac{1,2}{t}-5$

- Al remar río arriba: $x-5=\frac{1,2}{t+\frac{1}{2}} \Rightarrow x=\frac{1,2}{t+\frac{1}{2}}+5$

Entonces:

$$\frac{1,2}{t}-5=\frac{1,2}{t+\frac{1}{2}}+5$$

$$\Rightarrow \frac{1,2}{t}-\frac{1,2}{t+\frac{1}{2}}=10$$

$$\Rightarrow 1,2\left(t+\frac{1}{2}\right)-1,2t=10t\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1,2t+0,6-1,2t=10t^2+5t$$

$$\Rightarrow 10t^2+5t-0,6=0$$

$$\Rightarrow 50t^2+25t-3=0$$

$$\Rightarrow (5t+3)(10t-1)=0$$

$\Rightarrow t = \frac{-3}{5}$ o $t = \frac{1}{10}$

Entonces $x = \frac{1,2}{t} - 5$ y como $t = \frac{1}{10}$ se tiene que $x = 7$

RESPUESTA: la velocidad a la que rema el joven en agua tranquila es de 7 $\frac{km}{h}$.

Problema 57

<u>Solución</u>:

Para resolver este problema se utiliza la relación $v = \frac{d}{t}$ entre distancia recorrida *d*, velocidad media *v* y tiempo transcurrido *t*.

Se pueden ordenar los datos del problema en el siguiente cuadro:

	distancia	*velocidad*	*tiempo*
Como se hizo el recorrido	240	v	$\frac{240}{v}$
Si hubiera viajado a 20 $\frac{km}{h}$ más	240	$v + 20$	$\frac{240}{v+20}$

Además, si el viaje se hubiera realizado de la segunda manera, el tiempo hubiera sido dos horas menor, de donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{240}{v+20} = \frac{240}{v} - 2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{240}{v+20} - \frac{240}{v} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{240v - 240(v+20) + 2v(v+20)}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{240v - 240v - 4800 + 2v^2 + 40v}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2v^2 + 40v - 4800}{v(v+20)} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2\left(v^2+20v-2400\right)}{v\left(v+20\right)}=0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2\left(v+60\right)\left(v-40\right)}{v\left(v+20\right)}=0$$

$$\Rightarrow \qquad v=-60 \text{ o } v=40$$

Como v es la velocidad del tren, se requiere que v > 0, por lo tanto v = 40 y entonces $t=\frac{d}{v}=\frac{240}{40}=6$.

RESPUESTA: El tiempo en que se hizo el viaje fue 6 horas.

Problema 58

Solución:

	distancia	tiempo	velocidad
Caminó	30	x	$\frac{30}{x}$
Hubiera caminado	30	$x-1$	$\frac{30}{x-1}$

Como las velocidades difieren en un kilómetro por hora, se tiene que:

$$\frac{30}{x}+1=\frac{30}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{30\left(x-1\right)+x\left(x-1\right)}{x\left(x-1\right)}=\frac{30x}{x\left(x-1\right)} \quad \text{note que } x\neq 0 \text{ y } x\neq 1$$

$$\Rightarrow 30x-30+x^2-x=30x$$

$$\Rightarrow x^2-x-30=0$$

$$\Rightarrow \left(x+5\right)\left(x-6\right)=0$$

$$\Rightarrow x=-5, \quad x=6$$

Como la cantidad de horas es positiva se tiene que $x=6$

RESPUESTA: el deportista recorrió $30km$ en 6 horas; se puede además determinar que recorrió los 30 km a una velocidad promedio de 5km por hora.

Problema 59

Solución:

Sean:
x : la velocidad en agua quieta (ausencia de corriente)
t : el tiempo que dura el barco a favor de la corriente.

Note que 8 horas y 20 minutos es equivalente a $\frac{25}{3}$ horas.

El siguiente cuadro puede resumir los datos más claramente:

Barco	Velocidad	Tiempo	Distancia
A favor de la corriente	$x+4$	t	80
En contra de la corriente	$x-4$	$\frac{25}{3}-t$	80

Del cuadro anterior se tiene que:

a) $x+4=\frac{80}{t}$

$$\Rightarrow t=\frac{80}{x+4}$$

b) $x-4=\frac{80}{\frac{25}{3}-t}$

$$\Rightarrow \frac{25}{3}-t=\frac{80}{x-4}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{3}-\frac{80}{x-4}=t$$

Luego,

$$\frac{80}{x+4}=\frac{25}{3}-\frac{80}{x-4}$$

$$\Rightarrow \frac{80\cdot 3(x-4)}{3(x+4)(x-4)}=\frac{25(x+4)(x-4)-80\cdot 3(x+4)}{3(x+4)(x-4)}$$

$$\Rightarrow 240x-960=25\left(x^2-16\right)-240x-960$$

$$\Rightarrow 240x-960=25x^2-400-240x-960$$

$$\Rightarrow 25x^2-480x-400=0$$

$$\Rightarrow 5\left(5x^2-96x-80\right)=0$$

$$\Rightarrow 5x^2-96x-80=0$$

Nota:

$a=5$

$b=-96$

$c=-80$

$\Delta=(-96)^2-4\cdot 5\cdot -80$

$\Delta=10816$

$$\Rightarrow x = \frac{96 \pm \sqrt{10816}}{10}$$

$$\Rightarrow x = \frac{96 + \sqrt{10816}}{10} \quad \text{o} \quad x = \frac{96 - \sqrt{10816}}{10}$$

$$\Rightarrow x = 20 \quad \text{o} \quad x = \frac{-4}{5}$$

Como x representa una velocidad se tiene que $x = 20$

RESPUESTA: la velocidad en agua quieta es aproximadamente $20\ km/h$

Problema 60

Solución:

Sean:
x : Velocidad del tren rápido.
$x-12$: Velocidad del tren ordinario.

Como una velocidad es dos tercios de la otra, se tiene que:

$$x - 12 = \frac{2x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3(x-12)}{3} = \frac{2x}{3}$$

$$\Rightarrow 3(x-12) = 2x$$

$$\Rightarrow 3x - 36 = 2x$$

$$\Rightarrow x = 36$$

RESPUESTA: la velocidad del tren rápido es $36\frac{km}{h}$ y la del tren ordinario $24\frac{km}{h}$

Problema 61

Solución:

Sean

x: velocidad habitual del corredor

t: tiempo que ¿duró? O tardó en correr los $72km$

El siguiente cuadro resume los datos del problema:

	Velocidad	Distancia	Tiempo
Supuesta	$x+2$	72	$t-6$
Real	x	72	t

Entonces se tiene que:

a) $x+2=\dfrac{72}{t-6}$ b) $x=\dfrac{72}{t}$

$\Rightarrow t-6=\dfrac{72}{x+2}$ $\Rightarrow t=\dfrac{72}{x}$

$\Rightarrow t=\dfrac{72}{x+2}+6$

Luego,

$$\frac{72}{x+2}+6=\frac{72}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{72x+6x(x+2)}{x(x+2)}=\frac{72(x+2)}{x(x+2)}$$

$$\Rightarrow 72x+6x^2+12x=72x+144$$

$$\Rightarrow 6x^2+12x-144=0$$

$$\Rightarrow x^2+2x-24=0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-4)=0$$

$$\Rightarrow x=-6 \text{ o } x=4$$

Como x es positivo (representa la velocidad) se debe cumplir que $x=4$

RESPUESTA: la velocidad habitual del corredor es de $4\dfrac{km}{h}$

Problema 62

Solución:

Si se tiene que:
t = tiempo que tarda cada tren en su recorrido.
d_c = distancia recorrida por el tren de carga.
v_c = velocidad del tren de carga.
d_p = distancia recorrida por el tren de pasajeros.
v_p = velocidad del tren de pasajeros.

Entonces se tiene que $v_p = \frac{d_p}{t}$ y $v_c = \frac{d_c}{t}$

Como ambos trenes hacen el recorrido en el mismo tiempo, se despeja el tiempo de ambas ecuaciones, obteniéndose:

$t = \frac{d_p}{v_p}$ y $t = \frac{d_c}{v_c}$

Ahora, se igualan dichas ecuaciones: $\frac{d_p}{v_p} = \frac{d_c}{v_c}$

Además, recuerde que el tren de pasajeros es 5 millas por hora mas rápido que el de carga, ello se expresa de la siguiente manera: $v_p = v_c + 5$

Sustituyendo esta última igualdad en la ecuación $\frac{d_p}{v_p} = \frac{d_c}{v_c}$ se obtiene $\frac{d_p}{v_c + 5} = \frac{d_c}{v_c}$

Por otro lado se sabe que $d_p = 105 millas$ y $d_c = 90 millas$

Sustituyendo estos valores en $\frac{d_p}{v_c + 5} = \frac{d_c}{v_c}$ se obtiene

$$\frac{105}{v_c + 5} = \frac{90}{v_c}$$

$$\Rightarrow \frac{105}{v_c + 5} - \frac{90}{v_c} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{105 v_c - 90(v_c + 5)}{v_c(v_c + 5)} = 0$$

Basta encontrar la solución de la ecuación

$105v_c - 90(v_c + 5) = 0$

$\Rightarrow 105v_c - 90v_c - 450 = 0$

$\Rightarrow 15v_c = 450$

$\Rightarrow v_c = \dfrac{450}{15}$

$\Rightarrow v_c = 30$

RESPUESTA: la velocidad del tren de carga es de 30 millas por hora.

NOTA: Observe que a esta velocidad el tren de carga tarda 3 horas en realizar el recorrido. El tren de pasajeros, que viaja entonces a una velocidad de 35 millas por hora, también tarda 3 horas en recorrer las 105 millas como dice el enunciado.

Problema 63

Solución 1:

Sea x la velocidad de B.

$x+4$: La velocidad de A.

Se tiene:

$x = \dfrac{d_B}{2} \Rightarrow d_B = 2x$ note que se utiliza la fórmula $v = \dfrac{d}{t}$

$x + 4 = \dfrac{d_A}{2} \Rightarrow \quad d_A = 2(x+4)$

Note que el tiempo es el mismo (2 horas) para ambos corredores

Al haber formado un ángulo recto en el punto P, se cumple que $(d_A)^2 + (d_B)^2 = (40)^2$

Entonces: $\left[2(x+4)\right]^2 + (2x)^2 = 1600$

$\Rightarrow \ 4(x+4)^2 + 4x^2 = 1600$

$\Rightarrow \ 4(x^2 + 8x + 16) + 4x^2 = 1600$

$\Rightarrow \ 8x^2 + 32x - 1536 = 0$

$\Rightarrow \ x^2 + 4x - 192 = 0$

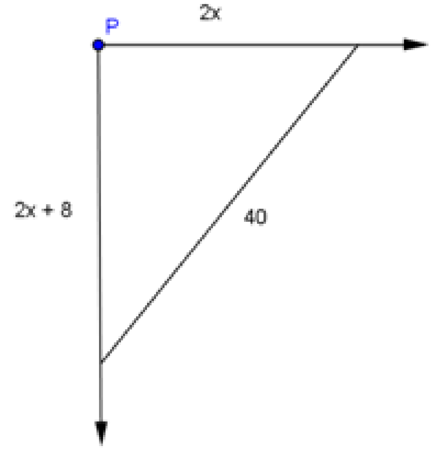
$$\Rightarrow \; (x-12)(x+16)=0$$

$$\Rightarrow \; x=12, \quad x=-16$$

Antes de dar las conclusiones se propone otra solución.

<u>Solución 2</u>:

Se tiene una situación como la que se muestra en la figura:



Aplicando el teorema de Pitágoras (porque el triángulo que se determina es rectángulo) se tiene

$(2x)^2+(2x+8)^2=1600$ (lo demás está en la solución 1)

	Tiempo (en h)	Velocidad (En Km/h)	Distancia (en Km)
A	2	$x+4$	$2x+8$
B	2	x	$2x$

RESPUESTA: La velocidad a la que se desplaza el corredor B es $12\dfrac{km}{h}$

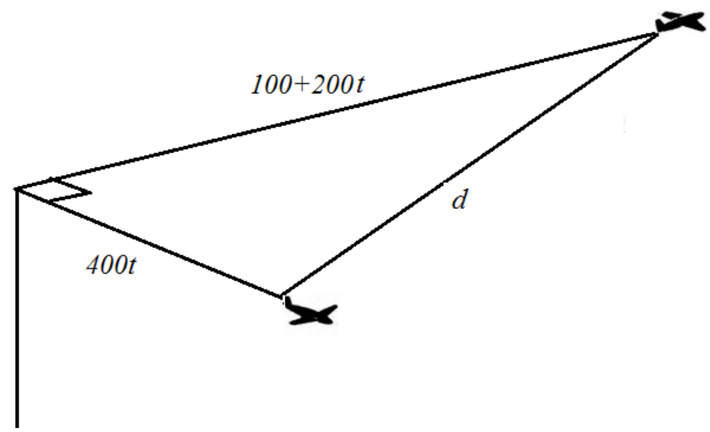
Problema 64

<u>Solución</u>:

Sea t el tiempo en horas y d la distancia entre los dos aviones en millas después de las 2:30 p.m.; es decir, las 2:30 p.m. representa $t=0$. Entonces se tiene que:

Como el aeroplano A viaja a 200 mi/h, en esa media hora (de las 2:00 p.m. a las 2:30 p.m.) ha recorrido 100 mi.

- $100+200t$: la distancia recorrida por el aeroplano A después de las 2:30 p.m.
- $400t$: la distancia recorrida por el aeroplano B después de las 2:30 p.m.
- $d^2=(400t)^2+(100+200t)^2$ (aplicando el teorema de Pitágoras)



Como se quiere encontrar el tiempo transcurrido t para que la distancia entre los dos aviones sea 500 millas, entonces:

$$500^2=(400t)^2+(100+200t)^2$$

$$\Rightarrow\ 250000=160000t^2+10000+40000t+40000t^2$$
$$\Rightarrow\ 25=16t^2+1+4t+4t^2$$
$$\Rightarrow\ 0=20t^2+4t-24$$
$$\Rightarrow\ 0=4\left(5t^2+t-6\right)$$
$$\Rightarrow\ 0=4(5t+6)(t-1)$$
$$\Rightarrow\ t=1 \text{ o } t=-\frac{6}{5}$$

Como t es tiempo, se descarta la solución negativa que tiene esta ecuación. Por lo tanto, sucede 1 h después de las 2:30.

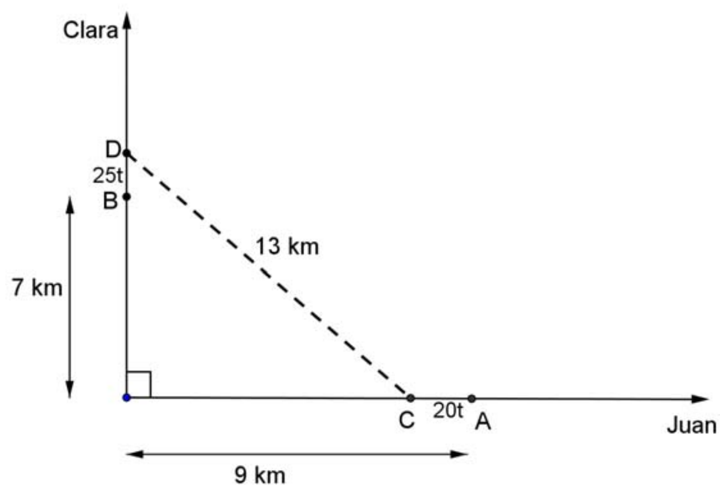
RESPUESTA: A las 3:30 p.m. la distancia entre los aviones es 500 millas.

Problema 65

Solución:

Sea t el tiempo transcurrido desde el momento que parten ambos ciclistas (desde el punto A y B respectivamente en la figura).

En la figura, C y D son los puntos donde la distancia entre Juan y Clara es de 13 Km.



Entonces $d(A,C)=20t$ y $d(D,B)=25t$ (porque el recorrido se realiza en el mismo tiempo y la distancia, relacionando velocidad y tiempo, está dada por $d=vt$).

Por el teorema de Pitágoras se tiene que: $(7+25t)^2+(9-20t)^2=13^2$

$$\Rightarrow\ 49+350t+625t^2+400t^2-360t+81=169$$
$$\Rightarrow\ 1025t^2-10t-39=0$$
$$\Rightarrow\ (205t+39)(5t-1)=0$$
$$\Rightarrow\ t=\frac{1}{5}\quad \text{o}\quad t=\frac{-39}{205}$$

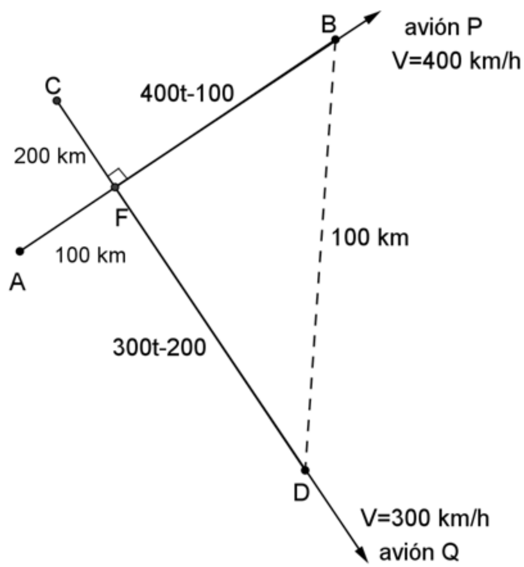
Como t representa el tiempo en horas, se toma $t=\frac{1}{5}$ hora, es decir 12 minutos.

RESPUESTA: a los 12 minutos estarán separados por 13 km.

Problema 66

<u>Solución</u>:

Considere la siguiente figura:



Sea t el tiempo transcurrido en que ambos aviones se desplazan desde los puntos de salida A y C hasta los puntos donde se alcanzan los 100 km entre ambos aviones (B y D respectivamente). Se tiene que:

$$d(A,B) = 400t$$

$$d(C,D) = 300t$$

Además $d(A,F) = 100$ y $d(C,F) = 200$ según los datos del problema.

Entonces: $d(F,D) = 300t - 200$

$$d(F,B) = 400t - 100$$

Ahora, como en el punto F las trayectorias se intersecan de manera perpendicular, por el teorema de Pitágoras se tiene: $(400t-100)^2 + (300t-200)^2 = 100^2$

$$\Rightarrow \left[100\cdot(4t-1)\right]^2 + \left[100\cdot(3t-2)\right]^2 = 100^2$$

$$\Rightarrow 100^2\cdot(4t-1)^2 + 100^2\cdot(3t-2)^2 = 100^2$$

$$\Rightarrow \ (4t-1)^2+(3t-2)^2=1$$

$$\Rightarrow \ 16t^2-8t+1+9t^2-12t+4=1$$

$$\Rightarrow \ 25t^2-20t+4=0$$

$$\Rightarrow \ (5t-2)^2=0$$

$\Rightarrow \ t=\dfrac{2}{5}$ horas es decir $t=24$ minutos.

RESPUESTA: Deben transcurrir 24 min para que la distancia entre los aviones sea de 100 km.

Problema 67

Solución 1:

Sean:

x: Velocidad en agua tranquila (en ausencia de corriente).

t: Tiempo a favor de la corriente del río.

El siguiente cuadro puede facilitar la comprensión del problema

	A favor	**En contra**
Distancia	12	12
Tiempo	t	$5-t$
Velocidad	$x+1$	$x-1$

Del cuadro anterior se tiene que:

$$x+1=\frac{12}{t}\Rightarrow t=\frac{12}{x+1}$$

y

$$x-1=\frac{12}{5-t}\Rightarrow 5-t=\frac{12}{x-1}$$

$$\Rightarrow -t=\frac{12}{x-1}-5$$

$$\Rightarrow t=5-\frac{12}{x-1}$$

Entonces,

$$\frac{12}{x+1}=5-\frac{12}{x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{12(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{5(x+1)(x-1)-12(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 12(x-1)=5\left(x^2-1\right)-12x-12$$

$$\Rightarrow 12x-12=5x^2-5-12x-12$$

$$\Rightarrow 5x^2-24x-5=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(5x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=5, \quad x=\frac{-1}{5}$$

Antes de dar las conclusiones se propone otra solución.

Solución 2:

x: Velocidad en agua tranquila (en ausencia de corriente).

	Distancia (en mi)	Velocidad (en mi/h)	Tiempo (en horas)
A favor	12	$x+1$	$\frac{12}{x+1}$
En contra	12	$x-1$	$\frac{12}{x-1}$

Como van río abajo y regresan en un total de 5 horas, entonces $\frac{12}{x+1}+\frac{12}{x-1}=5$ o bien,

$\frac{12}{x+1}=5-\frac{12}{x-1}$ (lo demás está en la solución 1)

RESPUESTA: el equipo puede remar en aguas tranquilas a $5\frac{km}{h}$.

Problemas de acciones simultáneas

Problema 68

Solución:

Sea x la cantidad de tiempo que tardan haciendo el trabajo, si lo realizan entre los dos.

	Germán	**Juan**	**Juntos**
Tiempo que se tarda en hacer el trabajo	3 horas	4 horas	x horas
Parte del trabajo que se hace en una hora	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{x}$

Entonces se tiene que: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{12}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$$

Es decir, juntos pueden hacer el trabajo en $1\frac{5}{7}$ horas, que es aproximadamente 1 hora y 43 minutos.

RESPUESTA: juntos tardarían aproximadamente 1 hora y 43 minutos.

Problema 69

Solución:

Sea x la cantidad de horas que tarda B en realizar el trabajo.

$2x-11$: La cantidad de horas que tarda A en realizar el trabajo.

El siguiente cuadro resume los datos:

	B	A	Juntos
Cantidad de horas que se tarda en realizar el trabajo	x	$2x-11$	28
Parte del trabajo que se hace en una hora	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2x-11}$	$\frac{1}{28}$

Entonces se plantea la ecuación: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x-11}=\frac{1}{28}$

$$\Rightarrow \frac{28(2x-11)+28x}{28x(2x-11)}=\frac{x(2x-11)}{28x(2x-11)}$$

$$\Rightarrow 56x-308+28x=2x^2-11x$$

$$\Rightarrow 2x^2-95x+308=0$$

$$\Rightarrow (2x-7)(x-44)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{7}{2} \text{ o } x=44$$

Note que si $x=\frac{7}{2}$ entonces $2x-11$ sería negativo. Estas dos expresiones, x y $2x-11$, deben tomar valores positivos puesto que representan tiempo, por lo que se descarta $x=\frac{7}{2}$ Además, si $x=\frac{7}{2}$ entonces B tardaría menos tiempo que trabajando los dos juntos, lo cual no tendría sentido en el contexto del problema.

Es decir, x debe ser 44.

RESPUESTA: A tarda 77 horas y B tarda 44 horas en hacer el trabajo.

Problema 70

<u>Solución</u>:

Sea x la cantidad de minutos que duran las dos mangueras juntas en llenar el tanque.

$x+4$: Tiempo que dura una manguera en llenar el tanque.

$x+9$: Tiempo que dura la otra manguera en llenar el tanque.

	Manguera 1	**Manguera 2**	**Juntas**
Tiempo total para llenar el tanque	$x+4$	$x+9$	x
Parte del tanque que se llena cada minuto	$\frac{1}{x+4}$	$\frac{1}{x+9}$	$\frac{1}{x}$

Entonces se tiene que

$$\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+9)+x(x+4)}{x(x+4)(x+9)}=\frac{(x+4)(x+9)}{x(x+4)(x+9)}$$

$$\Rightarrow x^2+9x+x^2+4x=x^2+13x+36$$

$$\Rightarrow x^2-36=0$$

$$\Rightarrow x=6 \text{ o } x=-6$$

Como x es la cantidad de minutos, se tiene que $x=6$

RESPUESTA: las dos mangueras juntas tardan 6 minutos en llenar el tanque

Problema 71

<u>Solución</u>:

Para resolver este problema se utilizará el hecho de que si en un trabajo se tardan n horas entonces la parte del trabajo que se hace cada hora es $\frac{1}{n}$. Por ejemplo, si se tardan 3 horas en total, cada hora se hace $\frac{1}{3}$ del trabajo.

En este caso, el trabajo se contabiliza en días, no en horas; sin embargo la relación anterior funciona de la misma manera. Sea x la cantidad de tiempo (en días) que tardan trabajando juntos

	Granjero	**Jornalero**	**Juntos**
Tiempo que se tarda en hacer el trabajo	4 días	6 días	x días
Parte del trabajo que se hace en un día	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{x}$

Entonces se tiene que: $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{12}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$$

RESPUESTA: juntos tardarían $2\frac{2}{5}$ días

Problema 72

Solución:

Sea x la cantidad de tiempo (en minutos) que se tarda en llenar el tanque usando las dos mangueras.

	Manguera 1	**Manguera 2**	**Juntas**
Tiempo que se tarda en llenar el tanque	42 min	30 min	x
Parte del tanque que se llena en un minuto	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{x}$

Entonces: $\frac{1}{42}+\frac{1}{30}=\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{35}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{35}{2}=17,5$$

RESPUESTA: con las dos mangueras se tardará 17,5 minutos para llenar el tanque

Problema 73

Solución:

Sea x la cantidad de horas que tarda uno de los obreros

$x+10$: Cantidad de horas que tarda el otro obrero.

El siguiente cuadro puede ayudar a comprender mejor el problema:

	Obrero 1	**Obrero 2**	**Juntos**
Cantidad total de horas	x	$x+10$	12
Cantidad de trabajo en una hora	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+10}$	$\frac{1}{12}$

Entonces se tiene que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{12(x+10)+12x}{12x(x+10)}=\frac{x(x+10)}{12x(x+10)}$$

$$\Rightarrow 12x+120+12x=x^2+10x$$

$$\Rightarrow 24x+120=x^2+10x$$

$$\Rightarrow x^2+10x-24x-120=0$$

$$\Rightarrow x^2-14x-120=0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-20)=0$$

$$\Rightarrow x=-6 \quad \text{o} \quad x=20$$

Como x representa cantidad de horas, se debe cumplir que $x=20$

RESPUESTA: Uno de los obreros puede realizar la tarea en 20 horas y el otro en 30 horas.

Note que la cantidad de horas en que cada obrero realiza el trabajo por separado también pudo haberse planteado en x y $x-10$; el resultado de la ecuación sería entonces $x=30$, pero la respuesta sería siempre la misma.

Problema 74

Solución:

Sea x el tiempo que tarda uno de los estudiantes en pintar $1\,m^2$, en minutos.

$x-1$: El tiempo que dura el otro estudiante en pintar $1\,m^2$, en minutos.

Nota: Se pintan $27\,m^2$ en una hora, significa que juntos pintan $27\,m^2$ en 60 min. O sea tardan entre los dos $\frac{60}{27}=\frac{20}{9}\approx 2,22$ minutos en pintar $1\,m^2$

	Estudiante 1	**Estudiante 2**	**Juntos ($1\,m^2$)**
Tiempo que se tarda en hacer el trabajo	x	$x-1$	$\frac{20}{9}$
Parte del trabajo que se hace en un minuto	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{9}{20}$

Entonces: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{9}{20}$

$$\Rightarrow \frac{20(x-1)+20x}{20x(x-1)}=\frac{9x(x-1)}{20x(x-1)}$$

$$\Rightarrow 40x-20=9x^2-9x$$

$$\Rightarrow 9x^2-49x+20=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{49+\sqrt{1681}}{18}, \quad x=\frac{49-\sqrt{1681}}{18}$$

$$\Rightarrow x=5 \quad \text{o} \quad x\approx 0,44$$

$a=9 \qquad \Delta=b^2-4ac$

$b=-49 \qquad \Delta=(-49)^2-4\cdot 9\cdot 20$

$c=20 \qquad \Delta=1681$

Note que 0,44 no se usa dado que $x-1$ sería negativo

Entonces $x=5$ y $x-1=4$

RESPUESTA: Tardarían 5 y 4 minutos en pintar $1\,m^2$ cada uno de ellos por separado.

Problemas de oferta demanda

Problema 75

<u>Solución</u>:

Supóngase que s es el precio en dólares a pagar por persona para la excursión y que x es la cantidad de participantes. De esta manera se obtienen las siguientes dos afirmaciones:

a) si x es la cantidad actual de miembros del club que participan en la excursión y cada uno pagó s dólares para completar los 300 dólares, entonces se tiene que $300 = x \cdot s$.

b) si hubieran sido tres integrantes menos, dicha cantidad estaría expresada por $x-3$ y cada integrante tendría que pagar 5 dólares más, es decir un total de $s+5$ dólares**.** Por lo cual se tendría que $300 = (x-3)(s+5)$.

Ahora, de la primera ecuación se obtiene que $s = \dfrac{300}{x}$, por lo que al sustituir en la segunda ecuación se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&300 = (x-3)\left(\frac{300}{x}+5\right)\\
&\Rightarrow 300 = 300 + 5x - \frac{900}{x} - 15\\
&\Rightarrow 5x^2 - 15x - 900 = 0\\
&\Rightarrow 5(x+12)(x-15) = 0\\
&\Rightarrow x = -12 \text{ o bien } x = 15
\end{aligned}
$$

Como se trata de la cantidad de personas del club, debe ser la cantidad positiva. Así, al participar 15 miembros, cada uno debió pagar 20 dólares.

RESPUESTA: El total de miembros del club que participó en la excursión es de 15.

Problema 76

Solución 1:
Sea x la cantidad de horas en que la persona tenía programado realizar el trabajo.

$\frac{192}{x}$: Cantidad de dinero que la persona pensaba ganar por hora.

Como el trabajo no se realizó en el tiempo establecido se tienen los siguientes datos:

$x+4$ **:** Cantidad de horas de trabajo.

$\frac{192}{x+4}$: Cantidad de dinero que la persona ganó por hora.

Luego, como se tuvo una pérdida de 2,4 dólares por hora con respecto a lo que se esperaba ganar, se puede establecer que:

$$\frac{192}{x}-2,4=\frac{192}{x+4}$$

$$\frac{192}{x}-\frac{192}{x+4}=2,4$$

$$\Rightarrow \frac{192\left(x+4\right)-192x}{x\left(x+4\right)}=\frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow 5\left[192\left(x+4\right)-192x\right]=12x\left(x+4\right)$$

$$\Rightarrow 5\left[192x+768-192x\right]=12x^2+48x$$

$$\Rightarrow 3840=12x^2+48x$$

$$\Rightarrow -12x^2-48x+3840=0$$

$$\Rightarrow x^2+4x-320=0$$

$$\Rightarrow \left(x-16\right)\left(x+20\right)=0$$

$$\Rightarrow x=16 \text{ o } x=-20$$

Como x es la cantidad de horas entonces tiene que ser un número positivo, de manera que el valor de x es 16.

RESPUESTA: el tiempo en que se estimaba la finalización del trabajo era 16 horas.

Solución 2:

Sean x la cantidad de horas en que estaba planeado realizar el trabajo.
y la ganancia por hora que se esperaba obtener al realizar el trabajo.

	Ganancia por hora	**tiempo**	**Ganancia total**
Planeado	y	x	$y \cdot x$
Real	$y-2,4$	$x+4$	$(y-2,4)\cdot(x+4)$

Observe que en ambos casos se gana 192, es decir, el tiempo estimado y el tiempo real le generan el mismo ingreso al trabajador mencionado en este problema.

a) $y \cdot x = 192$

$\Rightarrow y = \dfrac{192}{x}$

b) $(y-2,4)(x+4)=192$

$\Rightarrow \left(\dfrac{192}{x}-2,4\right)(x+4)=192$

$\Rightarrow \left(\dfrac{192}{x}-\dfrac{12}{5}\right)(x+4)=192$

$\Rightarrow \dfrac{960-12x}{5x}\cdot(x+4)=192$

$\Rightarrow (960-12x)(x+4)=960x$

$\Rightarrow 960x+3840-12x^2-48x=960x$

$\Rightarrow -12x^2-48x+3840=0$

$\Rightarrow x^2+4x-320=0$

$\Rightarrow (x-16)(x+20)=0$

$\Rightarrow x=16$ o $x=-20$

Como x es la cantidad de horas entonces tiene que ser un número positivo, de manera que el valor de x es 16

RESPUESTA: la cantidad de horas en que se planeaba terminar el trabajo es de 16.

Problema 77

Solución:

Sea x la cantidad de objetos que compró.

$\frac{300}{x}$: Costo de cada objeto.

$x+10$: Cantidad de objetos que hubiera comprado.

$\frac{300}{x}-5$: Costo que debía tener cada objeto para poder comprar 10 más.

Entonces se tiene que:

$$\left(\frac{300}{x}-5\right)(x+10)=300$$

$$\Rightarrow \quad (300-5x)(x+10)=300x$$

$$\Rightarrow \quad 300x+3000-5x^2-50x-300x=0$$

$$\Rightarrow \quad -5x^2-50x+3000=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2+10x-600=0$$

$$\Rightarrow \quad (x+30)(x-20)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=-30 \quad \text{o} \quad x=20$$

Como la cantidad de objetos es positiva, se tiene que $x=20$

RESPUESTA: María compró 20 objetos

Problema 78

Solución:

Sea x la cantidad de rebajos de \$10 que se hace a partir de los \$300, entonces $2x$ es la cantidad de unidades adicionales que se venderían al nuevo precio. Note que x debe ser un número entero positivo menor que 30.

Precio por unidad (en dólares)	Cantidad de unidades vendidas	Ingresos (en dólares)
300	15	4500
300 – 10x	15 + 2x	$(300-10x)(15+2x)$

Entonces, se tiene que:

$$7000=(300-10x)(15+2x)$$

$$\Rightarrow\ 7000=4500+600x-150x-20x^2$$

$$\Rightarrow\ -20x^2+450x-2500=0$$

$$\Rightarrow\ 2x^2-45x+250=0$$

$$\Rightarrow\ (2x-25)(x-10)=0$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{25}{2},\quad x=10$$

Como la cantidad de rebajas es un número entero, se tiene que $x=10$. Por lo tanto el precio de venta sería 200 .

RESPUESTA: El precio que producirá ingresos semanales de \$7000 es \$200. (Sustituyendo $x=10$ en $300-10x$).

Problema 79

Solución:

Sea x el costo del objeto

$11-x$: Ganancia al venderlo a \$11 (recuerde que la ganancia es igual al precio de venta menos el costo)

Note que $x\%$ de x, es decir $\left(\frac{x}{100}\cdot x\right)$,también es la ganancia al venderlo a \$11 entonces se tiene que:

$$\frac{x}{100} \cdot x = 11 - x$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{100} = 11 - x$$

$$\Rightarrow x^2 = 100(11 - x)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1100 - 100x$$

$$\Rightarrow x^2 + 100x - 1100 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 110)(x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow x = -110, \quad x = 10$$

Como el costo es un número positivo, entonces $x = 10$
Para verificar: el 10% de 10 es 1, por lo tanto el precio de venta es 10 + 1 = 11.

RESPUESTA: el costo del objeto es de $10

Problema 80

Solución:

Sea x la cantidad de acciones que compró Carlos.

Entonces se tiene que:

- $\frac{1560}{x}$: el precio de cada una de las acciones que compró Carlos.
- $\frac{1560}{x} + 24$: el precio en que Carlos vendió cada una de las acciones.
- $x - 10$ la : cantidad de acciones que Carlos vendió.

De lo anterior se concluye que:

$$\left(\frac{1560}{x} + 24\right)(x - 10) = 1520 \quad \text{(dinero que obtuvo Carlos por la venta de las acciones)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1560 + 24x}{x}\right)(x - 10) = 1520$$

$$\Rightarrow (1560+24x)(x-10)=1520x$$

$$\Rightarrow 1560x-15600+24x^2-240x=1520x$$

$$\Rightarrow 24x^2-200x-15600=0$$

$$\Rightarrow 3x^2-25x-1950=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ o } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x=\frac{25+\sqrt{24025}}{2\cdot 3} \text{ o } x=\frac{25-\sqrt{24025}}{2\cdot 3}$$

$$a=3,\ b=-25,\ c=-1950$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=(-25)^2-4\cdot 3\cdot -1950=24025$$

$\Rightarrow x=30$ o $x=\frac{-65}{3}$ (esta última solución se descarta porque x es cantidad de acciones, por lo tanto debe ser un número natural)

RESPUESTA: Carlos había comprado 30 acciones y vendió 20.

Bibliografía

Gobran Alfonse. Álgebra Elemental. Grupo Editorial Iberoamérica. México 1990.

Rees y Sparks. Álgebra. Décima Edición. Editorial Mc Graw-Hill. México 1991.

Sancho Lizeth y Blanco Randall. Matemática para la enseñanza media, ciclo diversificado: teoría y ejercicios. San José, Costa Rica. SIEDIN. 2010

Swokowski, E: Cole, J. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Undécima edición. Editorial Thomson. México: 2006.