Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Tema: Integrales impropias.

Objetivos:

- Clasificar las integrales impropias según su especie: primera, segunda o tercera especie.
- Calcular integrales impropias utilizando su definición mediante límites de la forma $\underset{x\to\infty}{lím}\ f(x)$, $\underset{x\to\varepsilon^+}{lím}\ f(x)$ o $\underset{x\to\varepsilon^-}{lím}\ f(x)$.
- Determinar si las integrales impropias convergen o divergen.

Elaborado por:

Profa. Elizabeth Díaz G. y Salomón Hernández Ch.

Integrales propias

La estudiante y el estudiante ya han enfrentado situaciones en las que deben calcular integrales definidas utilizando la definición:

Ejemplo 1

Utilice sumas de Riemann para calcular $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+3\right)dx$.

En este caso para la función f cuyo criterio está dado por $f(x)=2x^2+3$, se tiene que f es continua en $\left[-1,2\right]$ y la longitud del intervalo es finita, es decir la longitud de $\left[-1,2\right]$ es $2--1=3$; a estas integrales se les denomina propias. El razonamiento que se presenta a continuación es familiar para el estudiantado por lo que se omitirán algunos detalles:

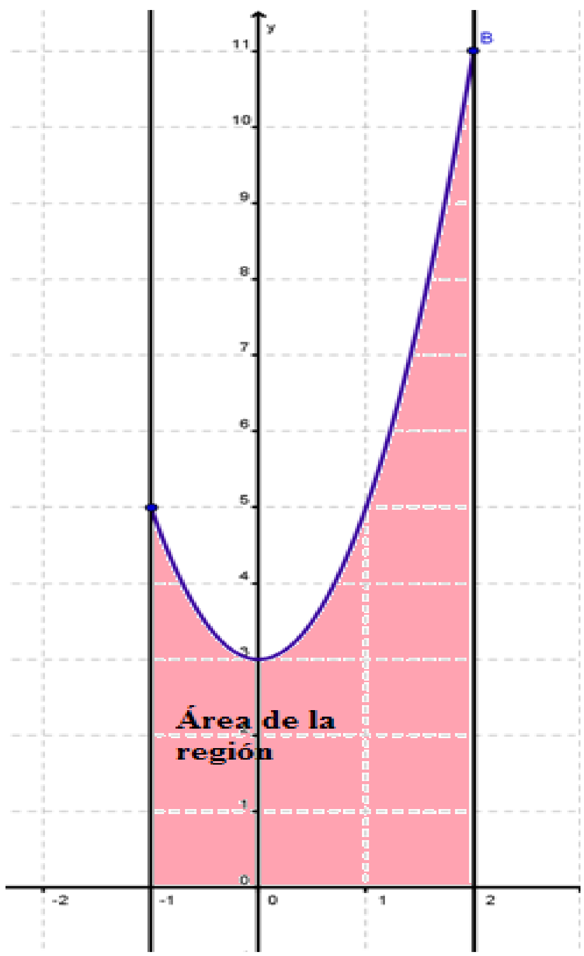
$$\int_{-1}^{2}\left(2x^2+3\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2-(-1)}{n}\cdot\left[2\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2+3\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left[2\left(1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right)+3\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left[2-\frac{12i}{n}+\frac{18i^2}{n^2}+3\right]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\cdot\left(5-\frac{12i}{n}+\frac{18i^2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{15n}{n}-\frac{36}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{54}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(15-\frac{36}{n^2}\cdot\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}+\frac{54}{n^3}\cdot\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right)=15-\frac{36}{2}+54\cdot\frac{2}{6}=15$$

Por lo tanto $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+3\right)dx=15$, donde su interpretación geométrica es el área acotada entre la gráfica de f y el eje x como se muestra en la figura

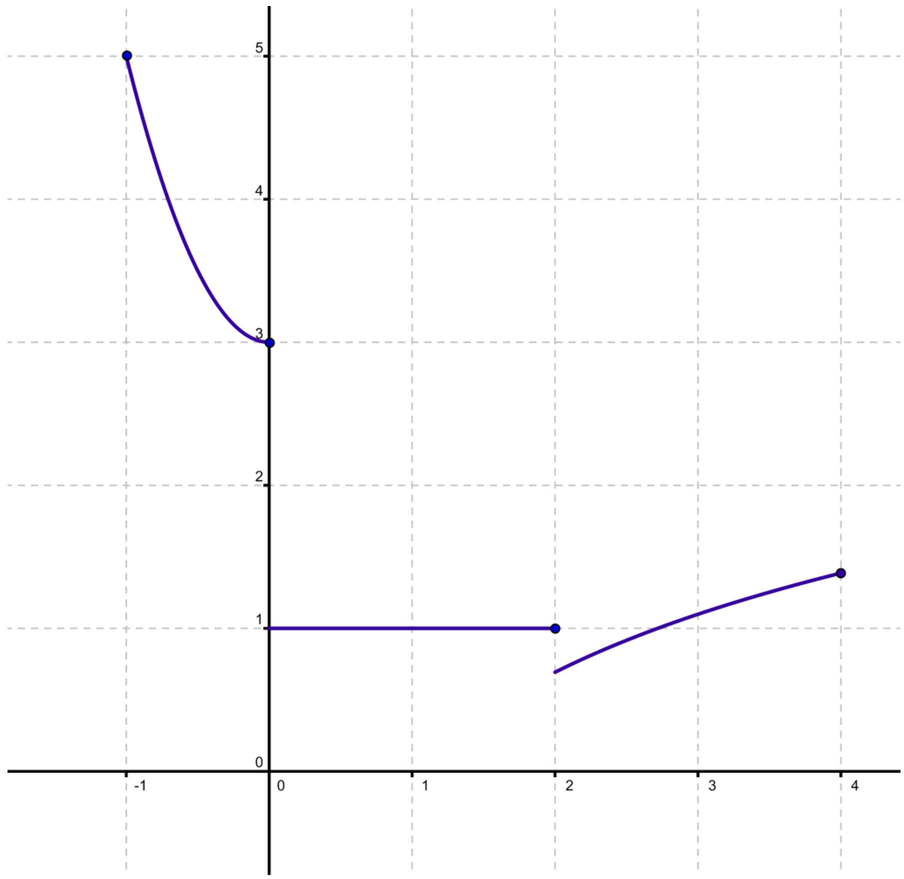


Ejemplo 2

Calcule $\int_{-1}^{4} h(x)\,dx$; donde

$$h(x)=\begin{cases} 2x^2+3 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ \ln(x) & \text{si} \quad 2<x\le 4 \end{cases}.$$

En este caso la función h presenta tres discontinuidades en $\left[-1,2\right]$, como se observa en la representación gráfica



En tales circunstancias el intervalo de integración debe partirse en $\left[-1,0\right]$, $\left[0,2\right]$ y $\left[2,4\right]$, donde h es continua en cada uno de esos intervalos de longitud finita, entonces $\int_{-1}^{4} h(x)\,dx=\int_{-1}^{0} 2x^2+3\,dx+\int_{0}^{2} 1\,dx+\int_{2}^{4} \ln(x)\,dx$; por lo tanto $\int_{-1}^{4} h(x)\,dx$ también se conoce como propia.

Ahora bien, se van a extender algunas características y el concepto de integral definida considerando funciones con discontinuidades infinitas (aquellas que presentan asíntotas verticales) o en integrales definidas en intervalos de longitud infinita, este tipo de integrales se denominan impropias.

Integrales impropias de primera especie

Las integrales de este tipo tienen la forma $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, donde el estudiante debe realizar una asociación directa con límites para decidir si la integral converge o diverge de acuerdo con la existencia o no existencia del límite, respectivamente.

Ejemplo 3

Clasifique la siguiente integral según su especie. Determine si ésta converge o diverge calculando sus respectivos límites:

$$I = \int_a^{\infty} \left(\frac{7-5x^2}{x^2} \right) dx; \quad a > 0.$$

Nótese que I tiene la forma de las integrales mencionadas. Por otro lado, es importante destacar que I no se indefine en a (pues es mayor que 0), de lo contrario se debería considerar como una integral de tercera especie. Ahora bi

$$\int_a^{\infty} \left(\frac{7-5x^2}{x^2} \right) dx = \lim_{K\to\infty} \int_a^{K} \left(\frac{7-5x^2}{x^2} \right) dx = \lim_{K\to\infty} \int_a^{K} \left(\frac{7}{x^2} - 5 \right) dx =$$

$$\lim_{K\to\infty} \left(7\frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 5x \right)_a^K = \lim_{K\to\infty} \left(\frac{-7}{x} - 5x \right)_a^K =$$

$$\lim_{K\to\infty} \left[\left(\frac{-7}{K} - 5K \right) - \left(\frac{-7}{a} - 5a \right) \right] = \lim_{K\to\infty} \left[\left(\frac{-7-5K^2}{K} \right) - \left(\frac{-7}{a} - 5a \right) \right] =$$

$$\lim_{K\to\infty} \left[\left(\frac{K^2\left(\frac{-7}{K^2} - 5 \right)}{K} \right) - \left(\frac{-7}{a} - 5a \right) \right] = \lim_{K\to\infty} \left[K\left(\frac{-7}{K^2} - 5 \right) - \left(\frac{-7}{a} - 5a \right) \right] = -\infty$$

Como le límite no existe, se tiene que I diverge.

Ejemplo 4

Clasifique la siguiente integral según su especie. Determine si ésta converge o diverge calculando sus respectivos límites:

$$I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx.$$

Considerando $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$, donde f es continua en $[3,\infty[$, entonces I se clasifica como una integral impropia de primera especie. Luego

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \lim_{K\to\infty} \int_3^{K} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx$$

Sea $u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx$, entonces $\lim\limits_{K\to\infty} \int_{\ln 3}^{K} \dfrac{1}{u^2}\, du = \lim\limits_{K\to\infty} \left(\dfrac{-1}{u} \right)_{\ln 3}^{K} = \lim\limits_{K\to\infty} \left(\dfrac{-1}{k} - \dfrac{-1}{\ln 3} \right) = \dfrac{1}{\ln 3}$.

Como el límite existe, entonces I converge a $\dfrac{1}{\ln 3}$.

Integrales impropias de segunda especie

Se clasifican de segunda especie aquellas integrales de funciones no acotadas (que presentan una discontinuidad infinta) en uno o varios puntos del intervalo $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$. En dado caso se requiere hacer un análisis específico en esos puntos donde la función no es acotada.

Ejemplo 5

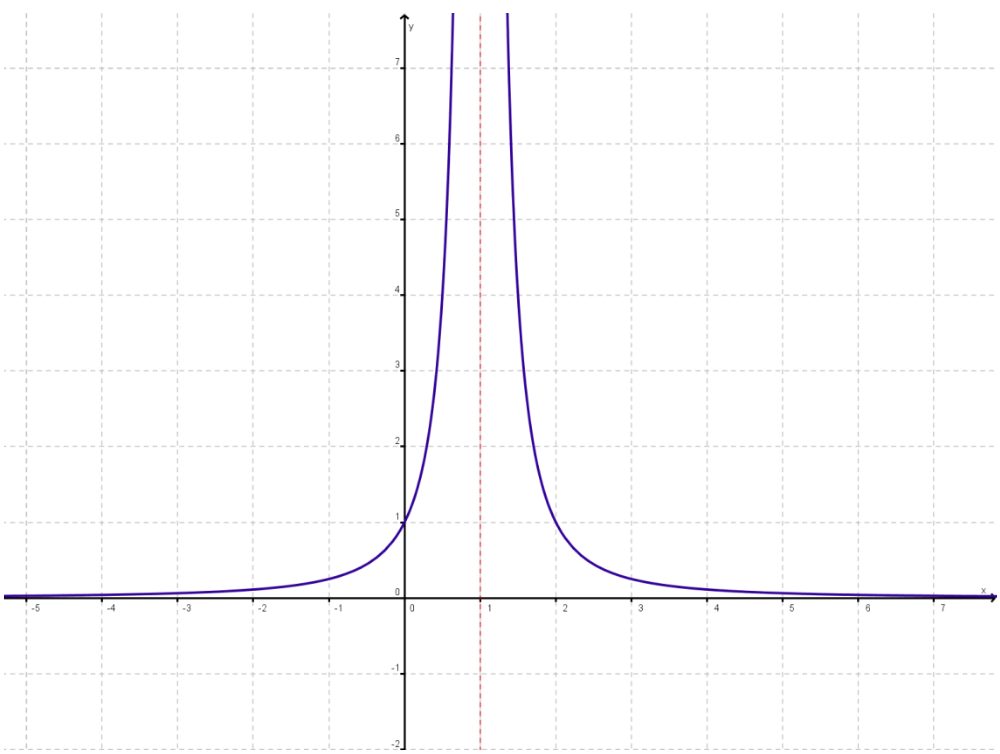
Clasifique la siguiente integral según su especie. Determine si ésta converge o diverge calculando sus respectivos límites:

$$A = \int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

Note que $f(x)=\dfrac{1}{\left(x-1\right)^2}$ se indefine en $x=1$, no obstante, como A se está considerando en $\left[0,2\right]$, entonces la integral se clasifica como una integral impropia de segunda especie y se procede de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
&\int_0^2 \frac{1}{\left(\boldsymbol{x}-1\right)^2}\,\boldsymbol{dx} = \int_0^1 \frac{1}{\left(\boldsymbol{x}-1\right)^2}\,\boldsymbol{dx} + \int_1^2 \frac{1}{\left(\boldsymbol{x}-1\right)^2}\,\boldsymbol{dx} = \\
&\lim_{\boldsymbol{k}\to 0^+} \int_0^{1-\boldsymbol{k}} \frac{1}{\left(\boldsymbol{x}-1\right)^2}\,\boldsymbol{dx} + \lim_{\boldsymbol{k}\to 0^-} \int_{1+\boldsymbol{k}}^{2} \frac{1}{\left(\boldsymbol{x}-1\right)^2}\,\boldsymbol{dx} = \\
&\lim_{\boldsymbol{k}\to 0^+} \left[\frac{-1}{(\boldsymbol{x}-1)}\right]_0^{1-\boldsymbol{k}} + \lim_{\boldsymbol{k}\to 0^+} \left[\frac{-1}{(\boldsymbol{x}-1)}\right]_{1+\boldsymbol{k}}^{2} = \\
&\lim_{\boldsymbol{k}\to 0^+} \left[\frac{-1}{(1-\boldsymbol{k}-1)} - \frac{-1}{0-1}\right] + \lim_{\boldsymbol{k}\to 0^+} \left[\frac{-1}{(2-1)} - \frac{-1}{(1+\boldsymbol{k}-1)}\right] = \\
&\lim_{\boldsymbol{k}\to 0^+} \left[\frac{1}{\boldsymbol{k}} - 1\right] + \lim_{\boldsymbol{k}\to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\boldsymbol{k}}\right] = \infty
\end{aligned}
$$

Por lo tanto A diverge. A continuación se expone la representación gráfica de f



Ejemplo 6

Clasifique la siguiente integral según su especie. Determine si ésta converge o diverge calculando sus respectivos límites:

$$A = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$$

Se tiene que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ se indefine en $x = 2$, además f es continua en $\left[0,2\right[$, entonces la integral se clasifica como una integral impropia de segunda especia, luego

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \lim_{K\to 2^-} \int_0^K \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \lim_{K\to 2^-}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^K =$$
$$\lim_{K\to 2^-}\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{K}{2}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{0}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Como el límite existe, entonces A converge a $\dfrac{\pi}{2}$.

Integrales impropias de tercera especie

También se les conoce como integrales mixtas, pues son integrales que presentan las características de las integrales de primera y segunda especie, por ejemplo

$$B = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x}}\, dx$$

Nótese que si $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, f es continua en $\left]0,+\infty\right[$ con una asíntota vertical $x = 0$, entonces B se define como una integral indefinida de tercera especie. Luego si $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$, entonces

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+1\right)\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^\infty \frac{dx}{u^2+1}\, du = \lim_{b\to\infty} 2\int_0^b \frac{dx}{u^2+1}\, du =$$
$$\lim_{b\to\infty} 2\left(\arctan b - \arctan 0\right) = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Como el límite existe, entonces B converge a π.

Para efectos de evaluación, es importante aclarar que en ninguno de los tres casos se considerarán los criterios de convergencia, ya que el principal objetivo es que el estudiante comprenda por qué y para qué se considera la notación de límite, también como recomendación metodológica el o la docente puede recurrir a una representación gráfica que le ayude al estudiantado a reforzar sus conocimientos.

A continuación se presenta una selección de ejercicios que le permitirán poner en prácticas los conocimientos adquiridos, donde el o la estudiante debe clasificar cada una de las integrales según su especie y determinar si éstas convergen o divergen calculando sus respectivos límites.

Ejercicios tomados de Cálculo Trascendentes Tempranas de Zill, D. y Wright, W. (2011)

1. $\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$
2. $\int_1^\infty \frac{1}{x^{0.99}}\,dx$
3. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$
4. $\int_{-\infty}^{2} e^{2x}\,dx$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx$
6. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$
7. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx$
8. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$
9. $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$

13. $\int_2^\infty \left(\frac{1}{x^2+6x+5}\right)dx$
14. $\int_{-\infty}^{2} \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$
15. $\int_0^5 \frac{1}{x}\,dx$
16. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$
17. $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$
18. $\int_0^1 x\ln x\,dx$
19. $\int_1^e \frac{1}{x\ln x}\,dx$
20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\,dt$
21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\tan\theta}}\,d\theta$

10. $\int_{-\infty}^{3} \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$

11. $\int_{0}^{\infty} (e^{-x} \operatorname{sen} x)\, dx$

12. $\int_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$

22. $\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1+x}}\, dx$

23. $\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\, dx$

24. $\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) dx$

Ejercicios tomados de Ejercicios de Cálculo Límites de Ávila, F. (2003)

25. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}\, dx$

26. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

27. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\, dx$

28. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$

29. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+4}\, dx$

30. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx$

31. $\int_{0}^{\infty} (e^{-x} \cos x)\, dx$

32. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx$

33. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$

37. $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

38. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\, dx$

39. $\int_{-1}^{8} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx$

40. $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{4-x}}\, dx$

41. $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{e^x-1}\, dx$

42. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sec x\, dx$

43. $\int_{0}^{1} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

44. $\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2-1}\, dx$

34. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

36. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$

45. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx$

46. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Ejercicios tomados de Introducción al análisis real en una variable, de Piza, E. (2006)

47. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx,\ \text{con}\ \ p>0$

48. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\tan x}{x}\,dx$

50. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{x^2}\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^2}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx$

56. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$

59. $\displaystyle\int_0^{1} x\ln(1+x)\,dx$

60. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1+x}\,dx$

62. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^{1} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

64. $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

65. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$

67. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

57. $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} \, dx$

58. $\int_{0}^{1} x \ln(1-x) \, dx$

68. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x) \, dx$

Bibliografía

Ávila, F. (2001). *Ejercicios de Cálculo. Costa Rica*. Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Piza, E. (2006). *Introducción al análisis real en una variable*. Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo Trascendentes Tempranas*. México: McGraw-Hill Interamericana Editores.