INTEGRALES IMPROPIAS

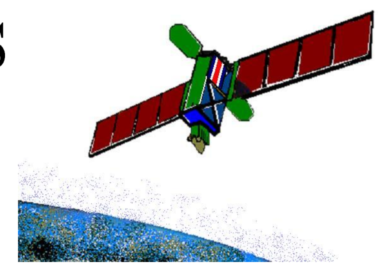
PROF. ÁLVARO ELIZONDO MONTOYA

Diciembre; 2012

alvaro.elizondo@sekcostarica.com
algebro.elizondo@gmail.com

Capítulo 1

INTEGRALES IMPROPIAS



1.1. Integrales impropias por paso al límite

Iniciemos este tema discutiendo el siguiente problema:

"Si se tiene un satélite que tiene una masa de una tonelada o $1000\,kg$ *sobre la superficie terrestre, ¿cuánto trabajo se requiere para colocar el satélite en una órbita a* $1000\,km$ *ó* $1000000\,m$ *de distancia de la superficie terreste?"*

Solución: *De la teoría de atracción gravitacional desarrollada por Newton, sabemos que la fuerza con la que un cuerpo es atraído hacia la Tierra (su peso) es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia del objeto al centro del planeta, así la fuerza* $F(d)$ *ejercida por la gravedad terrestre es:*

$$F(d) = \frac{k}{d^2}$$

Dado que el satélite pesa $1000\,kg$*, y el radio medio de la Tierra es de* $6371000\,m$*, se tiene entonces que:*

$$\begin{aligned} F(d) &= \frac{k}{d^2} \\ m \cdot g &= \frac{k}{d^2} \\ 1000\,kg \cdot 9,78\frac{m}{s^2} &= \frac{k}{(6371000\,m)^2} \\ k &= 3,9696668898 \times 10^{17}\frac{kg\,m^3}{s^2} \end{aligned}$$

De la física elemental sabemos que un cambio en el trabajo equivale al producto de la fuerza requerida y el incremento en la distancia, que en términos matemáticos se expresa como:

$$\Delta W = (fuerza) \cdot (incremento\ en\ la\ distancia) = F \cdot \Delta d$$

Así, para este caso se tendría que:

$$\Delta W = F(d) \cdot \Delta d = \frac{3,9696668898 \times 10^{17}}{d^2} \cdot \Delta d$$

luego para propulsar el satélite desde $d_0 = 6371000\,m$ *hasta* $d_1 = 7371000\,m$, *el trabajo total realizado corresponde a:*

$$\begin{aligned} W &= \int_{6371000\,m}^{7371000\,m} \frac{3,9696668898 \times 10^{17} \frac{kg\,m^3}{s^2}}{d^2} dd \\ &= \left. \frac{3,9696668898 \times 10^{17} \frac{kg\,m^3}{s^2}}{d} \right|_{6371000\,m}^{7371000\,m} \\ &= -53855201326,8\,J + 62308380000\,J \\ &= 8453178673,18\,J \\ &\approx 8453,18 MJ \end{aligned}$$

Este problema resulta interesante, más no tanto como el siguiente:
¿‘Cuánto trabajo es necesario para colocar una sonda con las mismas características del satélite del problema anterior a una distancia infinita de la Tierra?

Solución: *Antes de responder, valdría preguntarse si se requerirá una cantidad infinita de energía para que una sonda lanzada desde la Tierra recorra una distancia infinita, si como establecimos anteriormente, el trabajo es igual al producto de la fuerza aplicada por el incremento en la distancia. Experimentalmente sabemos que no puede ser infinita la cantidad de energía requerida pues desde los años 70 se han estado enviando sondas al espacio*

exterior y éstas recorren distancias cada vez mayores...
Razonando en forma similar a la solución del problema anterior, bastaría resolver la siguiente integral, en la que se ha sustituido el valor de $7371000\,m$ *por* $+\infty$*, veamos:*

$$\begin{aligned}
W &= \int_{6371000\,m}^{+\infty} \frac{3,9696668898\times 10^{17}\frac{kg\,m^3}{s^2}}{d^2}dd\\
&= \lim_{M\to+\infty}\int_{6371000\,m}^{M} \frac{3,9696668898\times 10^{17}\frac{kg\,m^3}{s^2}}{d^2}dd\\
&= \lim_{M\to+\infty}\left.\frac{-3,9696668898\times 10^{17}\frac{kg\,m^3}{s^2}}{d}\right|_{6371000\,m}^{M}\\
&= \lim_{M\to+\infty}\frac{-3,9696668898\times 10^{17}\frac{kg\,m^3}{s^2}}{M} + 62308380000\,J\\
&= 62308380000\,J\\
&\approx 62308,38\,MJ
\end{aligned}$$

Esto es apenas unas 7,37 veces lo que nos ha dado la respuesta del ejercicio anterior. Una integral en la que al menos uno de los límites de integración es infinito y su resultado es una cantidad finita, tal como la que hemos calculado, recibe el nombre de integral impropia de primera especie convergente.

Hasta ahora, las integrales definidas que se han estudiado por medio del teorema fundamental del cálculo, son del tipo: $\int_a^b f(x)dx$*, donde:*

1. *El intervalo* $[a,b]$ *es finito.*
2. *La función* f *es acotada en* $[a,b]$*.*
3. *La función* f *es continua en* $[a,b]$*.*

Llamamos integrales impropias a aquellas que no cumplen estos requerimientos, estas tienen alguna(s) de las siguientes dos condiciones:

1. *Uno o ambos límites de integración es infinito, a este tipo de integrales se les llama de* **primera especie**.

2. *f tiene un número finito de discontinuidades infinitas en el intervalo $[a, b]$, a este tipo de integrales se les llama de* **segunda especie**.

Integrales que tengan simultáneamente las condiciones de las de primera y segunda especie, se les llama: integrales impropias de **tercera especie**.

Definición: Integrales impropias de primera especie:
Si la integral propia $\int_a^b f(x)dx$ existe para cada $b \geq a$, se define una nueva función I como sigue:

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx \text{ para cada } b \geq a$$

La integral así definida recibe el nombre de integral infinita o impropia de primera especie y se indica por medio del símbolo $\int_a^\infty f(x)dx$. La integral se dice que es convergente si el límite:

$$\lim_{b\to\infty} I(b) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

existe y es finito. En caso contrario se dice que la integral $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente. Si el límite anterior existe y es igual a A, entonces se dice que A es el valor de la integral y se escribe: $\int_a^\infty f(x)dx = A$
Las integrales infinitas de la forma $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se definen de manera análoga. Además si $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ y $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ son ambas convergentes para un c, se dice que la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ es convergente y su valor se define como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Esta última integral se dice divergente si por lo menos una de las inetgrales del segundo miembro diverge.

Ejemplo 1: *Analice el comportamiento de la integral impropia* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$

Solución:

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx =$$

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\right] = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}-1}{1-p}$$

Analicemos los siguientes casos:

1. *Si* $p = 1$*, la integral inicial sería:* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} Ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} Ln|b| = +\infty$*, luego si* $p = 1$ *la integral impropia es divergente.*

2. *Si* $p > 1$*, entonces* $I = \displaystyle\lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$*, y la integral sería convergente a este valor.*

3. *Si* $p < 1$*, entonces* $I = \displaystyle\lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-p}-1}{1-p} = +\infty$*, y la integral sería divergente*

En resumen: *Una integral del tipo:* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ *converge si* $p > 1$ *y diverge si* $p \leq 1$.

Esto explica por qué la integral: $W = \displaystyle\int_{6371000\,m}^{+\infty} \frac{k}{d^2}dd$ *converge.*

Veamos:

$$W = \int_{6371000\,m}^{+\infty} \frac{k}{d^2}dd = \int_1^{+\infty} \frac{k}{d^2}dd - \int_1^{6371000\,m} \frac{k}{d^2}dd$$

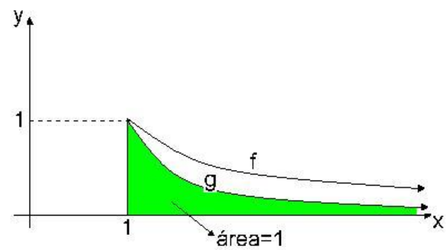
Así W *equivale a la suma de una integral impropia de primera especie convergente* $(p = 2 > 1)$ *y una integral de una función Riemann-integrable; por esto el valor de* W *es finito.*

Ejemplo 2: *Realice una comparación de las áreas acotadas por las gráficas de las funciones* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *y la función* $f(x) = \dfrac{1}{x}$*; la recta* $x = 1$ *y el eje de las abscisas.*

Solución:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[1 - \frac{1}{b}\right] = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} [\ln|x|]_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln|b| = +\infty$$



De donde se deduce que el área limitada por la gráfica de g *es acotada y tiene un valor de* 1*; sin embargo, el área limitada por la gráfica de* f *que apenas pareciera ser un poco más grande, en realidad es infinita.*

Ejemplo 3: *Analice el comportamiento de la integral impropia* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{px}dx$

Solución:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{px}dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M e^{px}dx = \lim_{M\to\infty} \left[\frac{e^{px}}{p}\right]_0^M = \frac{1}{p} \lim_{M\to\infty} [e^{pM} - 1]$$

Analicemos los siguientes casos:

1. *Si* $p = 0$*, entonces* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{px}dx = \int_0^{+\infty} 1\,dx = +\infty$ *y por tanto la integral diverge.*
2. *Si* $p < 0$*, entonces* $I = \dfrac{1}{p} \displaystyle\lim_{M\to\infty} [e^{pM} - 1] = \dfrac{-1}{p}$*, luego la integral converge a este valor.*
3. *Si* $p > 0$*, la integral es divergente pues* $I = \dfrac{1}{p} \displaystyle\lim_{M\to\infty} [e^{pM} - 1] = +\infty$

En resumen: *Una integral del tipo:* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{px}dx$ *converge si* $p < 0$ *y diverge si* $p \geq 0$.

Ejemplo 4: *Estudie la naturaleza de las siguientes integrales impropias de primera especie y determine el valor de las mismas cuando sean convergentes.*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$
7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+3}$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{8\,dx}{x^4+4}$
9. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$

Solución:

$\boxed{\mathbf{1.}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} xe^{-x^2}dx$

Realizando la sustitución:

$$\left[\begin{array}{c} u=-x^2 \Rightarrow \frac{-du}{2} = x\,dx \\ x=0\Rightarrow u=0; x=M \Rightarrow u=-M^2 \end{array}\right]$$

Así la integral se plantea como:

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^{-M^2} e^u\cdot\frac{-du}{2} = \frac{-1}{2}\lim_{M\to+\infty}\int_0^{-M^2} e^u du = \frac{-1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left[e^u\right]_0^{-M^2}$$
$$= \frac{-1}{2}\lim_{M\to+\infty}\left[e^{-M^2}-1\right] = \frac{1}{2}$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $\dfrac{1}{2}$

$\boxed{\textbf{2.}}$ $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M\frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

Realicemos la sustitución:

$$\left[\begin{array}{c} u=\sqrt{x}\Rightarrow 2udu=dx \\ x=1\Rightarrow u=1; x=M\Rightarrow u=\sqrt{M}\end{array}\right]$$

Luego:

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^{\sqrt{M}}\frac{2\cancel{u}du}{\cancel{u}(u^2+1)}=2\lim_{M\to+\infty}\int_1^{\sqrt{M}}\frac{du}{u^2+1}=2\lim_{M\to+\infty}\left[arctan(u)\Big|_1^{\sqrt{M}}\right]=$$

$$2\lim_{M\to\infty}\left[\arctan\left(\sqrt{M}\right)-\arctan(1)\right]=2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{2}$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $\frac{\pi}{2}$

$\boxed{\textbf{3.}}$ a) **Método 1:**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{M\to+\infty}[\arctan(x)]_{-M}^{M}$$

$$=\lim_{M\to+\infty}[arctan(M)-arctan(-M)]=\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2}=\pi$$

b) **Método 2:** *Dado que la función integrando es par pues* $f(-x)=f(x)$, *entonces es válido considerar que* $\int_{-M}^{M}f(x)dx=2\int_0^M f(x)dx$, *así:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^{M}\frac{dx}{x^2+1}=2\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$2\lim_{M\to+\infty}[\arctan(x)]_0^M=2\lim_{M\to+\infty}[\arctan(M)-\arctan(0)]=$$

$$2\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\pi$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* π

$\boxed{\mathbf{4.}}$ $$\int_2^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{M\to+\infty} \int_2^M \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

Realicemos la sustitución:

$$\begin{bmatrix} u = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow udu = xdx \\ x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{3}; x = M \Rightarrow u = \sqrt{M^2-1} \end{bmatrix}$$

Luego, bastaría resolver:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{M^2-1}} \frac{\cancel{u}\,du}{\cancel{u}} = \lim_{M\to+\infty} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{M^2-1}} 1\,du = \lim_{M\to+\infty} \Big[u\Big]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{M^2-1}}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \left[\sqrt{M^2-1} - \sqrt{3}\right] = +\infty$$

Respuesta: *La integral es divergente.*

Nota: *Una condición necesaria pero no suficiente para la convergencia de la integral impropia del tipo:* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$*, es que el límite cuando* $x \to +\infty$ *del integrando sea* 0*; obsérvese que en este caso:* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \neq 0$, *luego se puede afirmar que la integral es divergente.*

$\boxed{\mathbf{5.}}$ $$\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^4+3} = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{x\,dx}{(x^2)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

Realicemos la sustitución:

$$\begin{bmatrix} u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{2} = xdx \\ x = 0 \Rightarrow u = 0; x = M \Rightarrow u = M^2 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\lim_{M\to+\infty} \int_0^{M^2} \frac{\frac{du}{2}}{u^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \lim_{M\to+\infty} \int_0^{M^2} \frac{du}{u^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \lim_{M\to+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{u}{\sqrt{3}})\right]_0^{M^2} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\lim_{M\to+\infty}\left[\arctan\left(\frac{M^2}{\sqrt{3}}\right)-\arctan(0)\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}$

$\boxed{6.}$ $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{8\,dx}{x^4+4}=\lim_{M\to+\infty}\int_0^M\frac{8\,dx}{x^4+4}$

Resolvamos la integral aplicando el método de fracciones parciales, para esto primero debemos factorizar el denominador:

$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

Consideremos la descomposición:

$$\frac{8}{x^4+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

De donde:

$8=(A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2+(2A-2B+2C+2D)x+2B+2D$ *y entonces:*

$$\begin{cases} A+C & = & 0 & (1)\\ -2A+B+2C+D & = & 0 & (2)\\ 2A-2B+2C+2D & = & 0 & (3)\\ 2B+2D & = & 8 & (4)\end{cases}$$

De la ecuación (1) *se obtiene que* $2(A+C)=0\Rightarrow 2A+2C=0$*; usando esto en la ecuación* (3)*, se obtiene que:*

$$-2B+2D=0 \qquad (5)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (4) *y* (5) *se obtiene que:* $4D=8\Rightarrow D=2$*, de esto se desprende que* $B=2$. *Sumando miembro a miembro* (2) *y* (3) *se obtiene:* $-B+4C+3D=0\Rightarrow C=-1$ *y usando* (1) *finalmente se halla que:* $A=1$.

Así:

$$I = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{-x+2}{x^2-2x+2}\right]dx =$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^M \frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx+\frac{-1}{2}\int_0^M \frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx\right] =$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^M \frac{2x+2+2}{x^2+2x+2}dx+\frac{-1}{2}\int_0^M \frac{2x-2-2}{x^2-2x+2}dx\right] =$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^M \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int_0^M \frac{dx}{x^2+2x+2}+\frac{-1}{2}\int_0^M \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int_0^M \frac{dx}{x^2-2x+2}\right]$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^M \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx+\int_0^M \frac{dx}{(x+1)^2+1}+\frac{-1}{2}\int_0^M \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int_0^M \frac{dx}{(x-1)^2+1}\right]$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}Ln(x^2+2x+2)+\arctan(x+1)+\frac{-1}{2}Ln(x^2-2x+2)+\arctan(x-1)\right]_0^M =$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}Ln\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}\right)+\arctan(x+1)+\arctan(x-1)\right]_0^M =$$

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\frac{1}{2}Ln\left(\frac{M^2+2M+2}{M^2-2M+2}\right)+\arctan(M+1)+\arctan(M-1)\right] = 0+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* π.

$\boxed{7.}$ $$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$$

Considerando nuevamente el método de las fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x+(-A+2B)}{(x+2)(x-1)}$$

De donde se deduce que: $A+B=0$ *y* $-A+2B=1$*; sumando ambas ecuaciones miembro a miembro se obtiene:* $3B=1 \Rightarrow B=\dfrac{1}{3}$ *y por tanto* $A=\dfrac{-1}{3}$.

Luego basta calcular:

$$\frac{-1}{3}\lim_{M\to+\infty}\left[\int_2^M \frac{dx}{x+2} - \int_2^M \frac{dx}{x-1}\right] = \lim_{M\to+\infty}\left[ln(x+2) - ln(x-1)\right]_2^M =$$

$$\frac{-1}{3}\lim_{M\to+\infty} ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\Big|_2^M = \frac{-1}{3}\lim_{M\to+\infty}\left[ln\left(\frac{M+2}{M-1}\right) - ln4\right] = \frac{ln4}{3} = \frac{2ln2}{3}$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $\dfrac{2ln2}{3}$.

$\boxed{8.}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \cos(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_M^0 \cos(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\Big[\operatorname{sen}(x)\Big]_M^0 =$

$$-\lim_{M\to-\infty}[\operatorname{sen}(M)]$$

Respuesta: *Como este límite no existe, entonces la integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\cos(x)\,dx$ *es divergente por definición.*

$\boxed{9.}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}} = \lim_{M\to+\infty}\int_2^M \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$

Para simplificar el procedimiento, calculemos la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$, *para ello, realicemos la sustitución:*

$$\left[u = \sqrt{3x+2} \Rightarrow \frac{2u\,du}{3} = dx\ ;\ x = \frac{u^2-2}{3}\right]$$

Luego, la integral se transfoma en:

$$\int \frac{\frac{2\cancel{u}\,du}{\cancel{3}}}{\frac{u^2-2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{u}} = \int \frac{2\,du}{u^2-2}$$

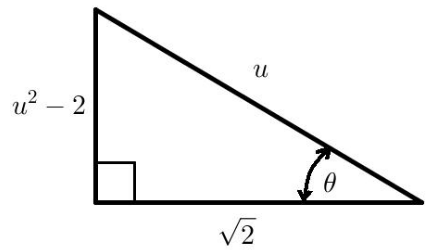
Realicemos ahora la sustitución trigonométrica:

$$\left[\begin{array}{c} u=\sqrt{2}\sec(\theta)\Rightarrow du=\sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta \\ u^2-2=\left(\sqrt{2}\sec(\theta)\right)^2-2=2\sec^2(\theta)-2=2\left(sec^2(\theta)-1\right)=2\tan^2(\theta) \end{array}\right]$$

Se tiene entonces que:

$$\int\frac{2\,du}{u^2-2}=\int\frac{\cancel{2}\sqrt{2}\sec(\theta)\cancel{\tan(\theta)}\,d\theta}{\cancel{2}\tan^{\cancel{2}}(\theta)}=\sqrt{2}\int\frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}d\theta=\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\cancel{\cos(\theta)}}}{\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cancel{\cos(\theta)}}}d\theta=$$

$$\sqrt{2}\int\csc(\theta)d\theta=\sqrt{2}\ln|\csc(\theta)-\cot(\theta)|+C$$



$$=\sqrt{2}\,\ln\left|\frac{u}{\sqrt{u^2-2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u^2-2}}\right|+C$$

$$=\sqrt{2}\,\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{\sqrt{u^2-2}}\right|+C$$

$$=\sqrt{2}\,\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{\sqrt{u-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{u+\sqrt{2}}}\right|+C=\sqrt{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{u-\sqrt{2}}}{\sqrt{u+\sqrt{2}}}\right|+C=$$

$$=\sqrt{2}\,\ln\left|\sqrt{\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}}\right|+C=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\ln\left|\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2}}\right|+C$$

Luego:

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}=\lim_{M\to+\infty}\int_2^M\frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{M\to+\infty}\ln\left[\left|\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2}}\right|\right]_2^M$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{M\to\infty}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{3M+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3M+2}+\sqrt{2}}\right|-\ln\left|\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}\right|\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3)$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln(3)$

Nota: *En este ejercicio hubiese sido más sencillo aplicar el método de las fracciones parciales y no el de la sustitución trigonométrica, pero se ha hecho de esta forma para ejemplificar el método, bastaba considerar que:*

$$\frac{2}{u^2-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{u-\sqrt{2}}-\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right]$$

Abordaremos ahora el estudio de las integrales impropias de segunda especie, estas se refieren a las integrales de funciones reales f definidas en un intervalo acotado I, donde alguna de las siguientes situaciones:

1. *f no es acotada sobre $I = [a, b]$*
2. *f es acotada sobre $I =]a, b]$ ó $I = [a, b[$, ó $I =]a, b[$*
3. *f no es acotada sobre $I =]a, b]$ ó $I = [a, b[$, ó $I =]a, b[$*

Definición: Integrales impropias de segunda especie:

Supongamos que f está definida en el intervalo $]a, b]$, y que la integral $\int_x^b f(t)\,dt$ existe para cada x que satisfsce $a < x \leq b$. Se define entonces una nueva función I como sigue:

$$I(b) = \int_x^b f(t)\,dt \text{ si } a < x \leq b$$

La función I así definida recibe el nombre de integral impropia de segunda especie y se indica por medio del símbolo $\int_{a+}^b f(t)\,dt$. La integral se dice que es convergente si el límite:

$$\lim_{x \to a+} I(x) = \lim_{x \to a+} \int_x^b f(t)\,dt$$

existe y es finito. Si esto no ocurre, se dice que la integral $\int_{a+}^b f(t)\,dt$ diverge. Si el límite anterior existe y es igual a A, entonces se dice que A es el valor de la integral y se escribe: $\int_{a+}^b f(t)\,dt = A$.

Nota: *Cuando se escribe $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en vez de $\displaystyle\int_{a+}^b f(x)\,dx$, es responsabilidad del lector darse cuenta que se trata de una integral impropia, en lugar de la integral de Riemann ordinaria. El uso de la notación $\displaystyle\int_{a+}^b f(x)\,dx$ es para enfatizar el hecho de que se trata de una integral impropia de segunda especie.*

Definición alterna: Integrales impropias de segunda especie:

Si f no es acotada solamente en el extremo $x = a$ del intervalo $[a, b]$, se define entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

Si el límite del segundo miembro existe se dice que la integral del primer miembro es convergente, en caso contrario se dice que es divergente.

Análogamente, si $f(x)$ no es acotada solo en el extremo $x = b$ del intervalo $[a, b]$, se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

Y en este caso la integral del primer miembro se dice convergente o divergente según exista o no el límite del segudo miembro.

Si $f(x)$ no es acotada solamente en un punto interior $x = x_0$ del intervalo [a,b], se define:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\epsilon_2}^b f(x)\,dx$$

La integral del primer miembro converge o diverge según existan o no los límites del segundo miembro. Se pueden generalizar estas definiciones al caso en que $f(x)$ no sea acotada en dos o más puntos del intervalo $[a, b]$.

Nota: *Puede suceder que los límites del segundo miembro de esta última expresión no existan cuando ϵ_1 y ϵ_2 tiendan a cero independientemente. En tal caso es posible que el límite exista si se elige $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$, o sea escribiendo:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$

Si una vez calculado esto, existe este último límite, se dice que este valor límite es el **valor principal de Cauchy** *de la integral del primer miembro.*

Ejemplo 5: *Analice el comportamiento de la integral* $I = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$

Solución:

Primero, debe observarse que el integrando no es acotado en $x = a$*, pues* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{1}{(x-a)^p} = +\infty$*, si* $p > 0$.

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p}$$

Realizando la sustitución:

$$\begin{bmatrix} u = x - a \Rightarrow du = dx \\ x = a+\epsilon \Rightarrow u = \epsilon; x = b \Rightarrow u = b-a \end{bmatrix}$$

La integral toma la forma:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{b-a} \frac{du}{u^p} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{b-a} u^{-p}\,du = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{u^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\epsilon}^{b-a} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{(b-a)^{-p+1} - \epsilon^{-p+1}}{-p+1}\right]$$

De este último límite y de la integral original se obtiene que:

1. *Si* $p = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_a^b \frac{1}{x-a}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^{b}\frac{dx}{x-a} = \lim_{\epsilon\to 0^+}[\ln(b-a) - \ln(\epsilon)] = +\infty$ *y la integral diverge.*

2. *Si* $p < 1 \Rightarrow I = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{(b-a)^{-p+1} - \epsilon^{-p+1}}{-p+1}\right] = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ *y la integral converge a este valor.*

3. *Si* $p > 1 \Rightarrow I = \displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{(b-a)^{-p+1} - \epsilon^{-p+1}}{-p+1}\right] = +\infty$ *y la integral diverge.*

En resumen: La integral $I = \displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx$ *converge al valor* $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ *sii* $p < 1$; *y diverge si* $p \geq 1$.

Ejemplo 6: *Considere la integral impropia* $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$, *para ella:*

1. *Determine la especie de la integral impropia.*
2. *Calcule la integral, indique si es convergente o divergente.*
3. *Transfórmela en una integral impropia de primera especie.(Esto siempre es posible.)*
4. *Transfórmela en una integral propia. (En este caso se puede hacer, pero no siempre es posible.)*

Solución:

1. *El integrando no es acotado en* $x = 2$ *pues* $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} = +\infty$, *y como ninguno de los límites de integración es infinito, la integral es impropia de segunda especie.*

2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} =$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \Big[\operatorname{arc\,sen}(x-1)\Big]_1^{2-\epsilon} =$$

$\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} [\operatorname{arc\,sen}(1-\epsilon) - \operatorname{arc\,sen}(0)] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ *Dado que el valor del límite es finito, la integral es convergente.*

3. *Consideremos la siguiente sustitución:*

$$\left[\begin{array}{c} 2-x = \frac{1}{u} \Rightarrow -dx = \frac{-1}{u^2}\,du \\ x = 2-\epsilon \Rightarrow u = \frac{1}{\epsilon};\, x = 1 \Rightarrow u = 1 \end{array}\right]$$

Así, la integral se plantea como:
$\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\displaystyle\int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{\frac{du}{u^2}}{\sqrt{\left(2-\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u}}} = \int_1^{+\infty} \frac{\frac{du}{u^2}}{\sqrt{\left(2-\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u}}} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{2u-1}}$; *y esta última integral es una integral de primera especie.*

$\boxed{4.}$ *Consideremos la siguiente sustitución, aplicada a la integral* $\displaystyle\int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$:

$$\left[\begin{array}{c} 2-x = u^2 \Rightarrow dx = -2u\,du \\ x = 2-\epsilon \Rightarrow u = \sqrt{\epsilon};\, x = 1 \Rightarrow u = 1 \end{array}\right]$$

Se obtiene, entonces la siguiente igualdad:
$\lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\displaystyle\int_1^{2-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_1^{\sqrt{\epsilon}} \frac{-2u\,du}{\sqrt{(2-u^2)u^2}} = \lim\limits_{\epsilon\to 0^+}\int_{\sqrt{\epsilon}}^1 \frac{2\,du}{\sqrt{2-u^2}} =$
$2\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2-u^2}}$ *y esta última integral corresponde a una integral propia.*

Ejemplo 7: *Considere la integral* $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$

1. *Determine si la integral converge en el sentido corriente.*
2. *Determine si la integral converge en el sentido del valor principal de Cauchy.*

Solución:

Es necesario tener claro que el integrando no está acotado en $x = 1$.

$\boxed{1.}$ *Por definición:*
$\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim\limits_{\epsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim\limits_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{1+\epsilon_2}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} =$

$\lim\limits_{\epsilon_1\to 0^+}\left[\dfrac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{-1}^{1-\epsilon_1} + \lim\limits_{\epsilon_2\to 0^+}\left[\dfrac{-1}{2(x-1)^2}\right]_{1+\epsilon_2}^{5} = \lim\limits_{\epsilon_1\to 0^+}\left[\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{2\epsilon_1^2}\right] +$

$\lim\limits_{\epsilon_2\to 0^+}\left[\dfrac{1}{2\epsilon_2^2} - \dfrac{1}{32}\right]$ *y como los límites no existen, la integral no converge (diverge) en el sentido usual.*

$\boxed{\mathbf{2.}}$ *Tomando* $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$, *se tiene:*

$$\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\epsilon}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}\right] =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{32}\right] = \frac{3}{32}$$

Así la integral existe en el sentido del valor principal de Cauchy.

Ejemplo 8: *Estudie la naturaleza de las siguientes integrales impropias de segunda especie y determine el valor de las mismas cuando sean convergentes.*

1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$
3. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2}$
4. $\displaystyle\int_{-2}^{7} \frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$
5. $\displaystyle\int_0^1 (x-1)\ln x\, dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2(x)\, dx$
7. $\displaystyle\int_2^4 \frac{x-2}{x^2-5x+4}\, dx$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\, dx}{x^2-1}$

Solución:

$\boxed{\mathbf{1.}}$ *En la integral:* $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$, *se observa que el integrando posee una discontinuidad infinta en* $x = 3$, *luego:*

1. $$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

Consideremos la siguiente sustitución:

$$\left[\begin{array}{c} u = \sqrt{3-x} \Rightarrow dx = -2u\, du \\ x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{3}; x = 3-\epsilon \Rightarrow u = \sqrt{\epsilon} \end{array}\right]$$

Se obtiene la siguiente expresión:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\epsilon}}\frac{-2\cancel{u}\,du}{\cancel{u}} = -2\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big[u\Big]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{\epsilon}} = -2\lim_{\epsilon\to 0^+}[\sqrt{\epsilon}-\sqrt{3}] = 2\sqrt{3}$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $2\sqrt{3}$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ *Es notorio que el integrando no está definido en* $x = 0$, *calculemos el valor aplicando la definición:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big[\ln(x)\Big]_{\epsilon}^{1} = \lim_{\epsilon\to 0^+}[0-\ln(\epsilon)] = +\infty$$

Respuesta: *La integral es divergente pues el límite no existe.*

$\boxed{\mathbf{3.}}$ *El único valor en el que el integrando no se haya acotado es* $x = 3$, *pues* $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$, *aplicando la definición se tiene:*

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2} &= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_0^{3-\epsilon_1}\frac{dx}{(x-3)^2} + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{3+\epsilon_2}^{4}\frac{dx}{(x-3)^2}\\
&= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^{3-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[\frac{-1}{x-3}\right]_{3+\epsilon_1}^{4}\\
&= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[\frac{1}{\epsilon_1}-\frac{1}{3}\right] + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[\frac{1}{\epsilon_2}-1\right]\\
&= (+\infty)+(+\infty)\\
&= +\infty;\ (\textit{por lo tanto la integral diverge.})
\end{aligned}$$

Nota: *Obsérvese que si por ahí algún incauto aplica el Teorema Fundamental del Cálculo sin percatarse que el integrando es discontinuo en* $x = 3$, *calcularía de esta forma:*

$$\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^2} = \left[\frac{-1}{x-3}\right]_0^4 = -1-\frac{1}{3} = \frac{-4}{3}$$

Es claro que este resultado es incorrecto ya que el integrando nunca es negativo.

$\boxed{\textbf{4.}}$ *La integral impropia* $\displaystyle\int_{-2}^{7}\frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$*, posee un integrando que no se haya definido en* $x=-1$*, que es un número del intervalo* $[-2,7]$*, entonces, de acuerdo con la definición para integrales impropias de segunda especie, obtenemos:*

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{7}\frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_{-2}^{-1-\epsilon_1}\frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}+\lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{-1+\epsilon_2}^{7}\frac{dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\\
&= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[3(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]_{-2}^{-1-\epsilon_1}+\lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[3(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]_{-1+\epsilon_2}^{7}\\
&= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[-3(\epsilon_1)^{\frac{1}{3}}+3\right]+\lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[3(8)^{\frac{1}{3}}-3(\epsilon_2)^{\frac{1}{3}}\right]\\
&= 3+6\\
&= 9
\end{aligned}$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* 9.

$\boxed{\textbf{5.}}$ *El integrando no es acotado en* $x=0$ *pues* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(x-1)\ln(x)=+\infty$. *Así*

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1}(x-1)\ln x dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{1}(x-1)\ln x\, dx\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\frac{x(x-4)}{4}\right]_{\epsilon}^{1}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{\epsilon^2}{2}-\epsilon\right)\ln\epsilon+\frac{\epsilon(\epsilon-4)}{4}\right]\\
&= \frac{3}{4}-0\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Nota: *En este ejercicio es necesario hacer uso del método de integración por partes y de la aplicación de la regla de L'Hôpital-Bernoulli.*

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $\frac{3}{4}$.

$\boxed{6.}$ *El integrando no es acotado en $x = \frac{\pi}{2}$, luego:*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sec^2(x)\,dx &= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon_1}\sec^2(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\int_{\frac{\pi}{2}+\epsilon_2}^{\pi}\sec^2(x)\,dx \\
&= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\Big[\tan(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon_1} + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\Big[\tan(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}+\epsilon_2}^{\pi} \\
&= \lim_{\epsilon_1\to 0^+}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\epsilon_1\right) - tan(0)\right] + \lim_{\epsilon_2\to 0^+}\left[\tan(\pi) - \tan\left(\frac{\pi}{2}+\epsilon_2\right)\right] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Respuesta: *La integral es divergente pues el límite no existe.*

$\boxed{7.}$ *El integrando $\dfrac{x-2}{x^2-5x+4}$ no es acotado en $x = 1$ ni en $x = 4$, de estos valores solo nos es interesa $x = 4$ pues $x = 1 \notin [2,4]$, luego basta calcular:*

$$\begin{aligned}
\int_2^4 \frac{x-2}{x^2-5x+4}\,dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_2^{4-\epsilon}\frac{x-2}{x^2-5x+4}dx \\
&= \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_2^{4-\epsilon}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-4}\right]dx \\
&= \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big[\ln|x-1| + 2\ln|x-4|\Big]_2^{4-\epsilon} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big[(\ln|3-\epsilon| + 2\ln|-\epsilon|) - (\ln|1| + 2\ln|-2|)\Big] \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Respuesta: *La integral es divergente pues el límite no existe.*

$\boxed{8.}$ *El integrando no es acotado en $x = 0$; luego basta calcular*

$$\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^1 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$$

Consideremos la siguiente sustitución:

$$\begin{bmatrix} u = \sqrt{x} \Rightarrow 2\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\ x = \epsilon \Rightarrow u = \sqrt{\epsilon}; x = 1 \Rightarrow u = 1 \end{bmatrix}$$

La integral se transforma como:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\sqrt{\epsilon}}^{1} 2e^u\,du = 2\lim_{\epsilon \to 0^+} \Big[e^u\Big]_{\sqrt{\epsilon}}^{1} = 2\lim_{\epsilon \to 0^+} [e - e^{\sqrt{\epsilon}}] = 2e - 2$$

Respuesta: *La integral es convergente al valor* $2e - 2$.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ *El integrando* $\dfrac{x}{x^2-1}$ *no es acotado en* $x = 1$ *ni en* $x = -1$*, de estos valores solo nos es interesa* $x = 1$ *pues* $x = -1 \notin [1, 2]$*, luego basta calcular:*

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x\,dx}{x^2-1} &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{1+\epsilon}^{2} \frac{x}{x^2-1} dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{1+\epsilon}^{2} \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right] dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\ln|x+1| + \ln|x-1|\right]_{1+\epsilon}^{2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[(\ln|3| + \ln|1|) - (\ln|2+\epsilon| + \ln|\epsilon|)\right] \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Respuesta: *La integral es divergente pues el límite no existe.*

Nota:*En este ejercicio se ha hecho uso del método de las fracciones parciales para establecer la igualdad:*

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right]$$

Nota: *Las integrales de 3^{era} especie son aquellas que presentan las condiciones de las integrales de 1^{era} especie y 2^{da} especie, es decir además de tener al menos uno de sus límites de integración infinitos, poseen además al menos una discontinuidad en el integrando. Estas integrales se pueden estudiar expresándolas como sumas de integrales impropias, cada una de las cuales tiene una de las formas definidas anteriormente. Por ejemplo, el integrando de la integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ *no es acotado en* $x = 0$*, eligiendo un número mayor que cero, por ejemplo 1, puede escribirse:*

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx}_{int.\,impropia\,de\,3^{era}\,especie} = \underbrace{\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx}_{int.\,impropia\,de\,2^{era}\,especie} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx}_{int.\,impropia\,de\,1^{era}\,especie}$$

Es fácil verificar que la primera integral del miembro derecho es convergente, mientras que la segunda es divergente, luego la integral dada es diverge.

Ejercicios misceláneos:

Instrucciones: Resuelva los siguientes ejercicios relativos a las integrales impropias.

A. *Indique la especie de las integrales (si es que estas son impropias.)*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

2. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{x-3}$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}}$

4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x}$

5. $\displaystyle\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$

6. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x}}$

8. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+\tan(x)}$

9. $\displaystyle\int_{3}^{10} \frac{x\,dx}{(x-2)^2}$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+x^2+1}$

11. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x}$

14. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x^3-8)^{\frac{2}{3}}}$

15. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)\,dx}{x^3}$

16. $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{(5-x)(x-1)}}$

17. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2^{\operatorname{arc\,sen}(x)}\,dx}{1-x}$

18. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen}(x))\,dx$

B. *Calcule las integrales impropias (o determine su divergencia).*

1. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

4. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^p}$

5. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}$

6. $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

7. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$

10. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

11. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$

12. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$

13. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

16. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+10}$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

18. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sen}(x)\, dx$

19. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln(x)}$

20. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2(x)}$

21. $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)} \quad (a>1)$

22. $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2(x)} \quad (a>1)$

23. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cot(x)\, dx$

24. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\operatorname{sen}(x)}$

25. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) dx$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)\, dx}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

27. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-kx}\, dx \quad (k>0)$

28. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan(x)\, dx}{x^2+1}$

29. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

30. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$

31. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3-5x^2}$

32. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\, dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$

34. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^4+1}$

35. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-4x}\, dx$

36. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x^2e^{-x}\, dx$

37. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\, dx$

38. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+3}}\right] dx$

39. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} (1-x)e^{-x}\, dx$

40. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

41. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\, dx}{1+e^{2x}}$

42. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

43. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$

44. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

45. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\pi x)\, dx$

46. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\, dx$

47. $\displaystyle\int_0^{1} x\ln(x)\, dx$

48. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln(x)\sqrt{\ln(x)}}$

49. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)\, dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

50. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)\, dx}{(1+x^2)^2} \quad (\star)$

51. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3-x}$

52. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)}$

53. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$

54. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^7}{x^{16}+1} dx$

55. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(|x|+1)^3}$

56. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$

57. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$

58. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}$

59. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cos(x)\, dx$

60. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^2+4}$

61. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(x+1)}\, dx$

62. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$

63. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$

64. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cos(x)\, dx$

65. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{x^4+x^2}$

66. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x\, dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$

67. $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x\ln^3(x)}$

68. $\displaystyle\int_2^{4} \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$

69. $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$

70. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

71. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$

72. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \frac{1}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$

73. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

C. *Se define la transformada de Laplace de una función $F(x)$ como:*

$$f(s) = L\{F(x)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}F(x)\,dx$$

Compruebe que:

1. $L\{a\} = \dfrac{a}{s}; \qquad (s>0)$
2. $L\{e^x\} = \dfrac{1}{s-1}; \qquad (s>1)$
3. $L\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}; \qquad (s>a)$
4. $L\{\text{sen}(ax)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}; \qquad (s>0)$
5. $L\{\cos(ax)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}; \qquad (s>0)$
6. $L\{x\} = \dfrac{1}{s^2}; \qquad (s>0)$
7. $L\{x^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}; \qquad (s>0; n\in\mathbb{N}) \quad (\star)$
8. $L\{Y'(x)\} = sL\{Y(x)\} - Y(0)$

D. *Ejercicios propuestos en exámenes de años anteriores:*
Determine la especie de la integral impropia, además analice su convergencia o divergencia.

1. 2012 $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$

2. 2012 $\displaystyle\int_{-\infty}^0 x\cos(x)\,dx$

3. 2012 $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Respuestas:

A.

1. *integral impropia de primera especie*
2. *integral impropia de segunda especie*
3. *integral impropia de tercera especie*
4. *integral propia pues* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$
5. *integral impropia de segunda especie*
6. *integral impropia de segunda especie*
7. *integral impropia de segunda especie*
8. *integral impropia de tercera especie*
9. *integral propia, pues* $2 \notin [3, 10]$
10. *integral impropia de primera especie*
11. *integral propia pues* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos(x^2)}{x} = \dfrac{1}{2}$
12. *integral impropia de primera especie*
13. *integral impropia de* 1^{era} *especie pues* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$
14. *integral impropia de segunda especie*
15. *integral impropia de segunda especie*
16. *integral impropia de segunda especie*
17. *integral impropia de segunda especie*
18. *integral impropia de segunda especie*

B.

1. *converge,* 2
2. *diverge*
3. *diverge*
4. *converge si* $p < 1$*; diverge si* $p \geq 1$
5. *diverge*
6. *converge, 9*
7. *converge,* $\dfrac{\pi}{2}$
8. *converge,* π
9. *diverge*
10. *converge,* 1
11. *converge,* $\dfrac{1}{2}$
12. *diverge sin importar el valor de* p
13. *diverge*
14. *converge,* π
15. *converge,* $\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$
16. *converge,* $\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$
17. *converge,* $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$
18. *diverge*
19. *diverge*
20. *converge,* $\dfrac{1}{\ln(2)}$
21. *diverge*
22. *converge,* $\dfrac{1}{\ln(a)}$
23. *diverge*
24. *diverge*
25. *coverge,* 2
26. *converge,* 2
27. *converge si* $k > 0$*, diverge si* $k \leq 0$
28. *converge,* $\dfrac{\pi^2}{8}$
29. *converge,* $\dfrac{4 - 3\ln(3)}{12}$
30. *converge,* $\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$
31. *diverge*
32. *diverge*
33. *converge,* $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$
34. *converge,* $\dfrac{\pi}{4}$
35. *diverge*
36. *converge,* 2

37. *converge,* $\frac{1}{2}$

38. *converge,* 2

39. *converge,* $-e^{-1}$

40. *converge,* $\frac{\pi}{4}$

41. *converge,* $\frac{\pi}{2}$

42. *converge,* π

43. *converge,* $\frac{\pi}{4}$

44. *converge,* $\frac{\pi}{2}$

45. *diverge*

46. *converge,* -1

47. *converge,* $\frac{-1}{4}$

48. *converge,* 2

49. *converge,* $\frac{\pi-2}{2}$

50. *converge,* 0

51. *converge,* $\frac{2\ln 2-\ln 3}{2}$

52. *converge,* $\frac{\ln 5-2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}{4}$

53. *converge,* $\frac{3-4\ln 2}{2}$

54. *converge,* $\frac{\pi}{32}$

55. *converge,* 1

56. *converge,* $\frac{1}{2}$

57. *diverge*

58. *converge,* $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

59. *converge,* $\frac{2}{5}$

60. *diverge*

61. *converge,* $1+\ln(2)$

62. *converge,* $\frac{1}{3}$

63. *converge,* $\frac{1}{2}$

64. *diverge*

65. *diverge*

66. *converge,* $\frac{5}{2}(\sqrt[3]{3}+1)$

67. *diverge*

68. *converge,* π

69. *converge,* $\frac{\pi}{3}$

70. *converge,* $\frac{16}{3}$

71. *converge,* $2\sqrt{2}$

72. *diverge*

73. *converge,* π

D.

1. *converge,* -1 *(use integración por partes)*
2. *diverge (ver resolución del ejercicio 8,* *página en 12)*
3. *converge,* $\dfrac{\pi}{2}$ *(ver ejemplo 6,* *página en 17)*