Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Profesores:

José Manuel Acosta Baltodano

Randall Blanco Benamburg

Índice

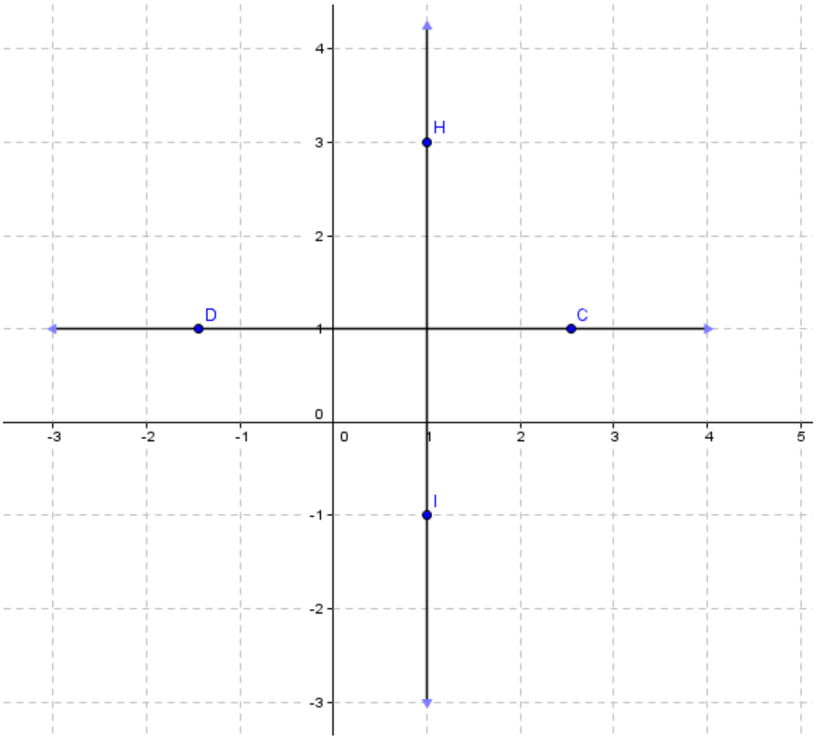
1. Segmentos y Rectas

Definición 1. *En un sistema de coordenadas cartesianas, una recta es horizontal si es paralela al eje X y el vertical si es paralela al eje Y.*

Definición 2. *Un segmento es vertical si está contenido en una recta vertical.*

Definición 3. *Un segmento es horizontal si está contenido en una recta horizontal.*

Ejemplo 1. *En la figura adjunta,* $\overleftrightarrow{\mathrm{HI}}$ *es vertical y* $\overleftrightarrow{\mathrm{DC}}$ *es horizontal*



Observaciones:

a. Todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{\mathrm{DC}}$ tienen 1 como coordenada del eje Y, es decir, son de la forma $(a, 1)$ donde $a \in \mathbb{R}$, por eso la ecuación de la recta se escribe $y = 1$.

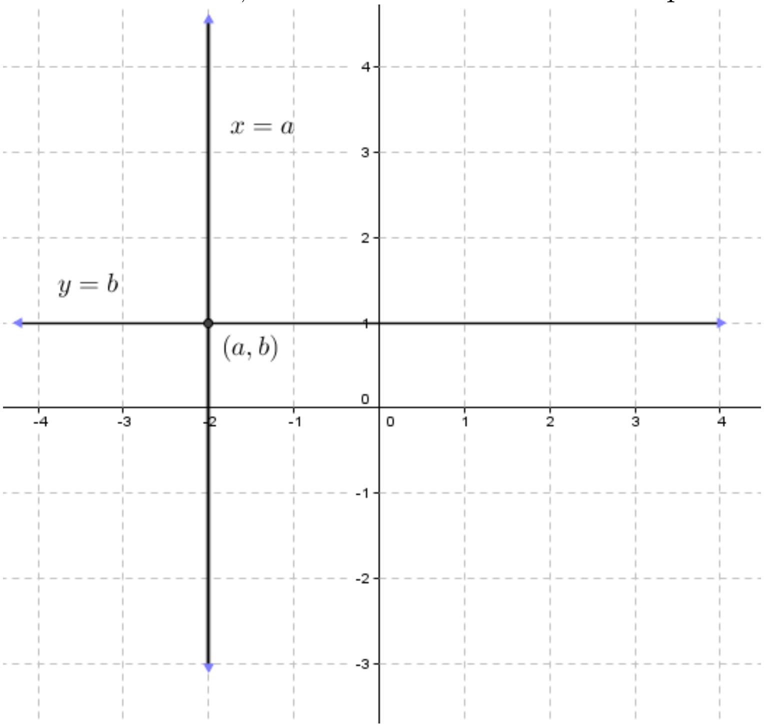
b. b) Todos los puntos de la recta $\overleftrightarrow{\mathrm{HI}}$ tienen 1 como coordenada del eje X, es decir, son de la forma $(1, b)$ donde $b \in \mathbb{R}$ donde , por eso la ecuación de la recta se escribe $x = 1$.

En general, si $P(a, b)$ es un punto cualquiera de un sistema de coordenadas cartesianas:

a. La recta paralela al eje X que pasa por P tiene ecuación $y = b$.

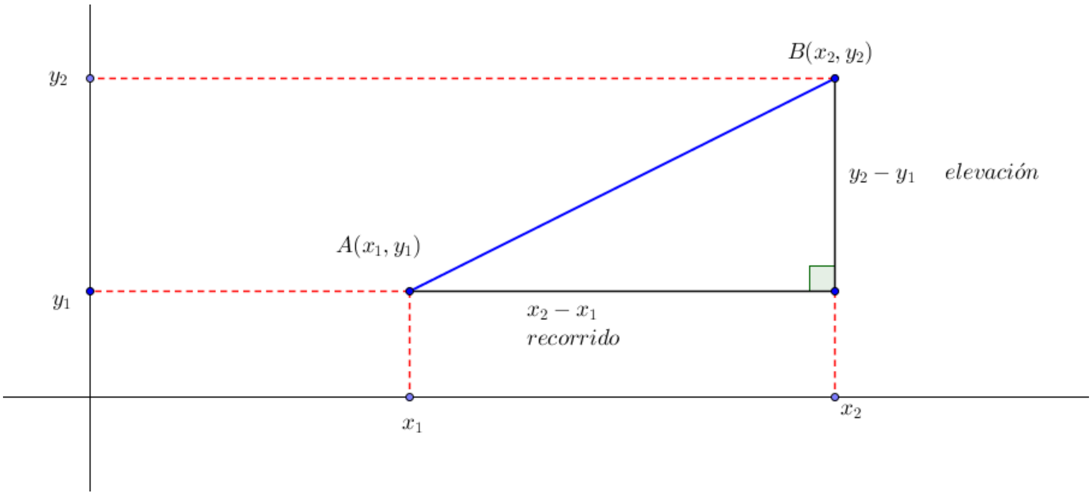
b. La recta paralela al eje Y que pasa por P tiene ecuación $x = a$.

NOTA: en el contexto de un sistema de coordenadas de dos dimensiones, cuando se indica x=2 por ejemplo, no se hace referencia al número real 2, sino al conjunto de todos los puntos del plano para los cuales x vale 2, el cual consiste en una recta paralela al eje de las ordenadas.



1.1. Pendiente de un segmento no vertical

Antes de definir la pendiente de una recta no vertical, en necesario discutir y analizar el concepto de pendiente de un segmento. En un sistema de coordenadas cartesianas considere un segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ (con esta condición el segmento no es vertical). Se llama cambio en X al número $\Delta x = x_2 - x_1$ y cambio en Y al número $\Delta y = y_2 - y_1$, también se conocen como elevación y recorrido respectivamente (considerando el "desplazamiento"del punto A hacia B).
La pendiente m de $\overline{AB}$ se define como el cociente del cambio en Y por el cambio en X, es decir: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, la interpretación geométrica es la siguiente:

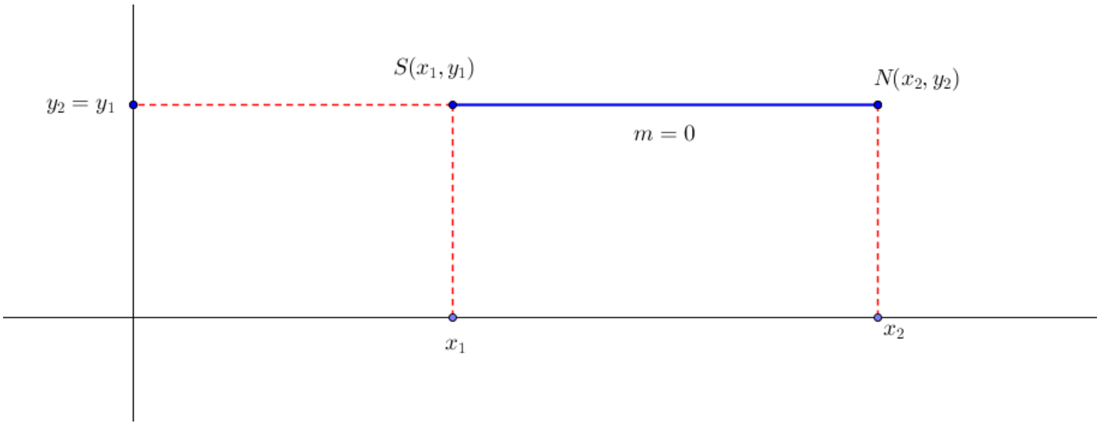


Algunas propiedades que se deducen de la definición anterior:

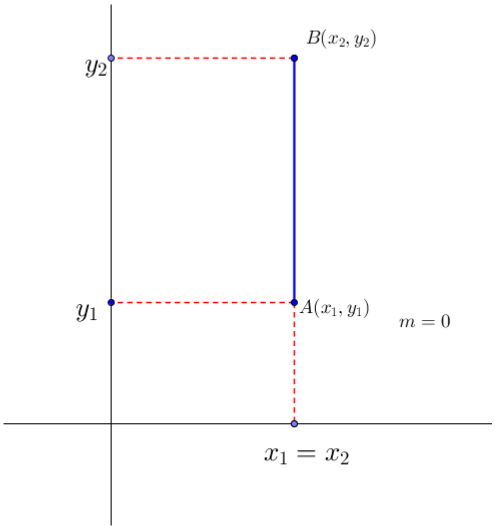
a. Si los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se intercambian, la pendiente no varía:
$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

b. Si un segmento es horizontal, su pendiente es cero. Note para que un segmento sea ho-

rizontal, las coordenadas del eje Y deben ser iguales. Por ejemplo, si consideramos un segmento con extremos $S(x_1, y_1)$ y $N(x_2, y_2)$ con $y_1 = y_2$ tenemos:
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{0}{x_2 - x_1} = 0$, geométricamente:



c. Un segmento vertical **NO** tiene pendiente, porque si es vertical, las coordenadas del eje X son iguales y en la fórmula de la pendiente el denominador $x_2 - x_1$ es igual a 0. Por ejemplo, si consideramos un segmento $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ con $x_1 = x_2$ tenemos:
$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{0}$ **¡Indefnido!**.



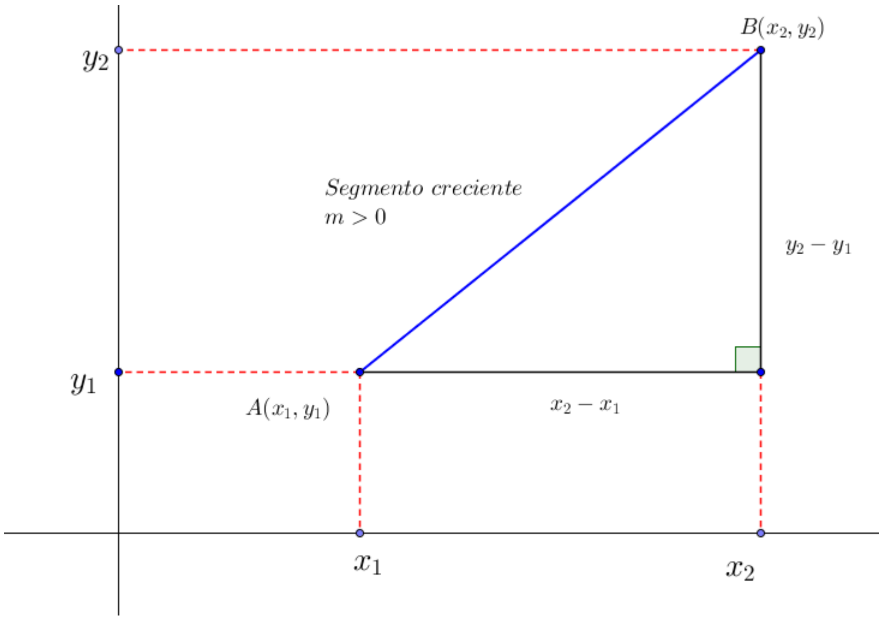
d. Si un segmento asciende de izquierda a derecha (creciente), su pendiente es positiva. Si el segmento desciende de izquierda a derecha (decreciente), su pendiente es negativa.

Como $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

Como $y_2 > y_1 \Rightarrow y_2 - y_1 > 0$

Entonces por ley de signos:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$



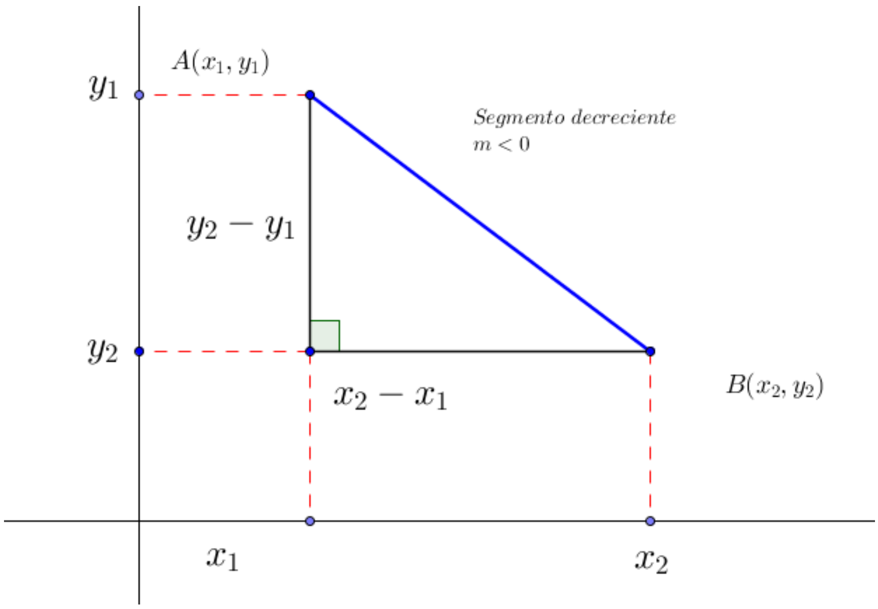
Análogamente:

Como $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$

Como $y_1 > y_2 \Rightarrow y_2 - y_1 < 0$

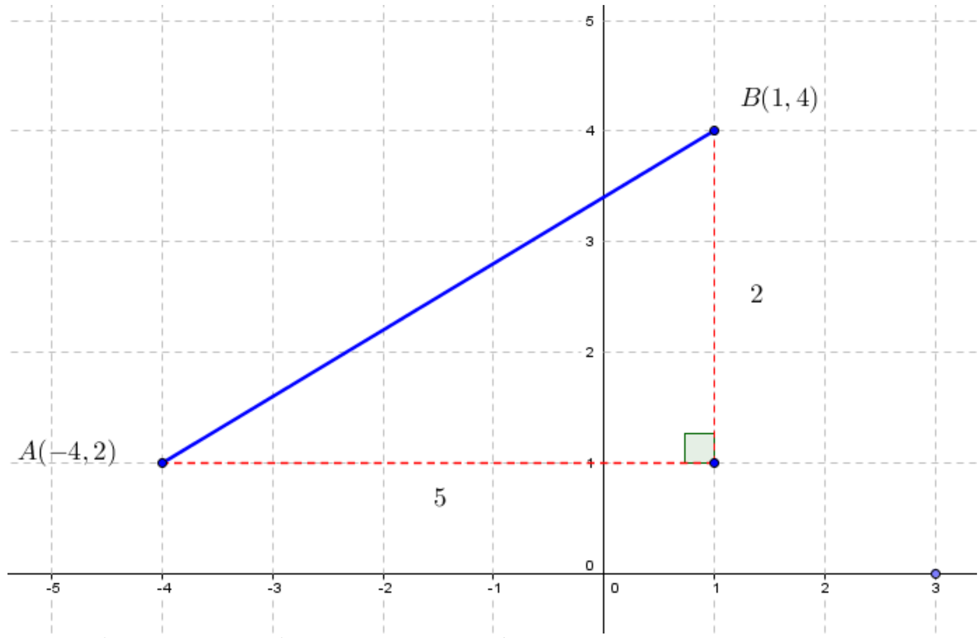
Entonces por ley de signos:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$



Ejemplo 2. *Calcule la pendiente de $\overline{AB}$ para:*

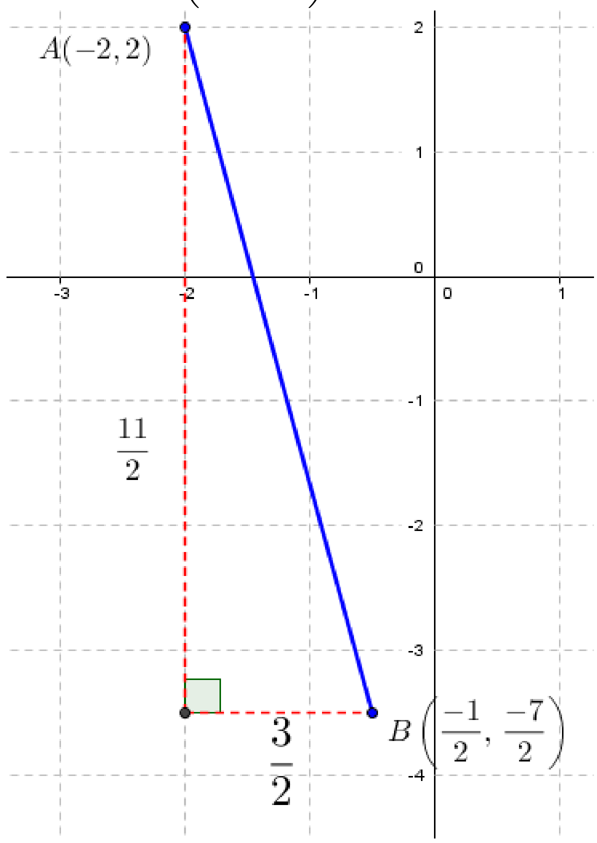
a. $A(-4, 2)$ *y* $B(1, 4)$



$$m = \frac{4-2}{1--4}$$

La pendiente se puede intrepretar así:
por cada 5 unidades en que se incremente la x, la y se incrementará 2 unidades.

b. $A(-2,2)$ *y* $B\left(\frac{-1}{2}, \frac{-7}{2}\right)$



$$m = \frac{\frac{-7}{2} - 2}{\frac{-1}{2} - -2} = \frac{\frac{-11}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-11}{3}$$

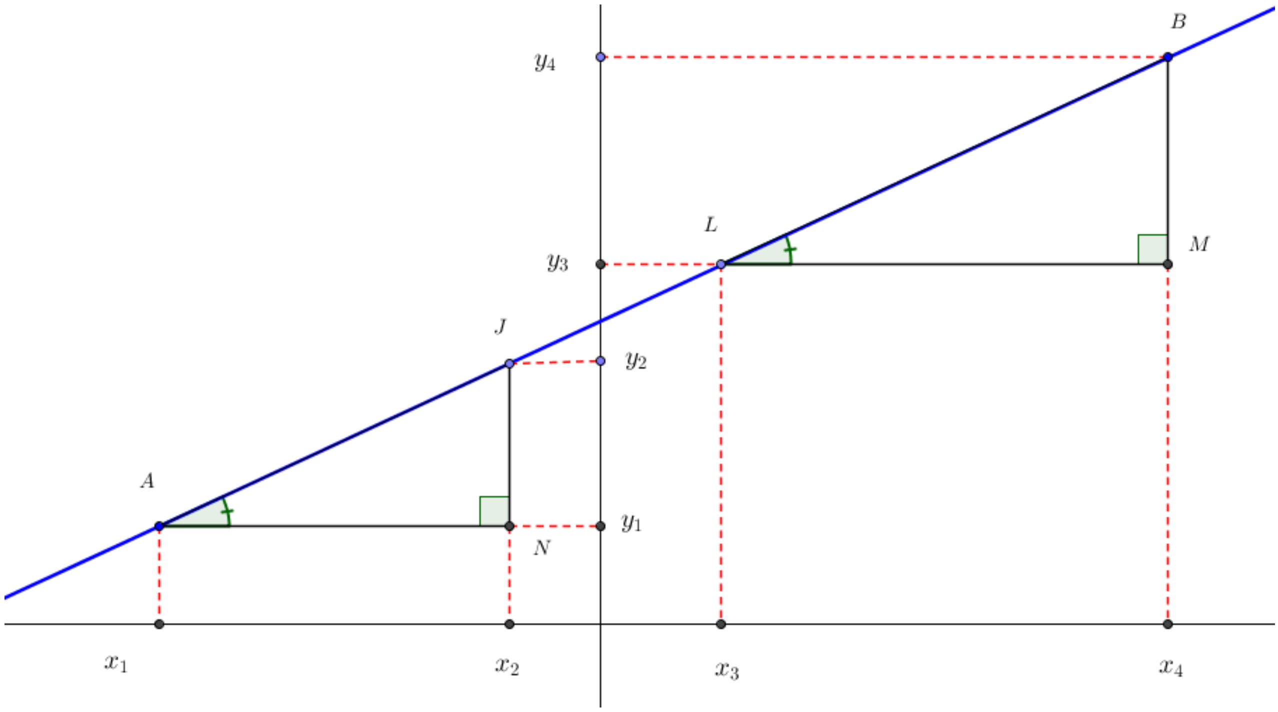
Note que da negativo porque el segmento es decreciente. La interpretación de este valor puede ser: por cada 3 unidades en que se incremente x, el valor de y disminuirá 11 unidades.

1.2. Pendiente de una recta no vertical

De la geometría Euclidea se conoce el siguiente postulado:

Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.

A continuación se justificará que todos los segmentos de una recta (no vertical) tienen la misma pendiente. En un sistema de coordenadas cartesianas considere una recta cualquiera y dos segmentos cualesquiera sobre ella y se justificará que la pendiente de ambos segmentos es la misma. Considere $A(x_1, y_1), J(x_2, y_2), L(x_3, y_3)$ y $B(x_4, y_4)$ entonces:

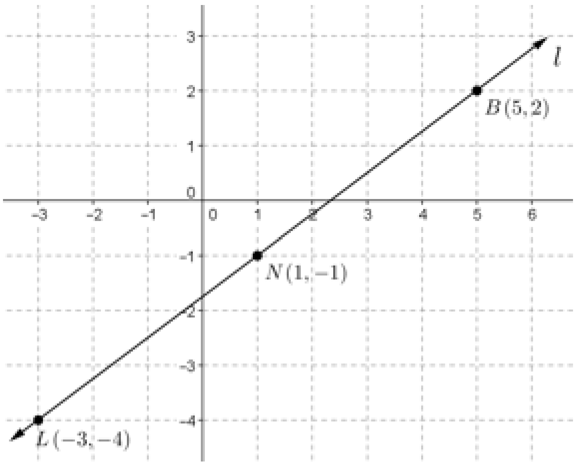


	Afirmación	Justificación
(1)	$m_{\overline{AJ}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Definición de Pendiente de un segmento.
(2)	$m_{\overline{LB}} = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$	Definición de Pendiente de un segmento.
(3)	$\triangle\ AJN \sim \triangle\ LBM$	Teorema de semejanza de triángulos AA.
(4)	$\dfrac{AJ}{LB} = \dfrac{JN}{BM} = \dfrac{AN}{LM}$	(3), definicion de semejanza de triángulos.
(5)	$\dfrac{y_2 - y_1}{y_4 - y_3} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3}$	Sustituyendo los valores en (4).
(6)	$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$	(4), propiedad de las proporciones .
(7)	$m_{\overline{AJ}} = m_{\overline{LB}}$	(1),(2),(6)

Note que si la recta es horizontal, todos los segmentos que se consideren sobre ella también los son, de modo que tienen pendiente cero. Con los discutido anteriormente se establece la siguiente definición:

Definición 4. *La pendiente de una recta no vertical es el número que es igual a la pendiente de todo segmento de la recta.*

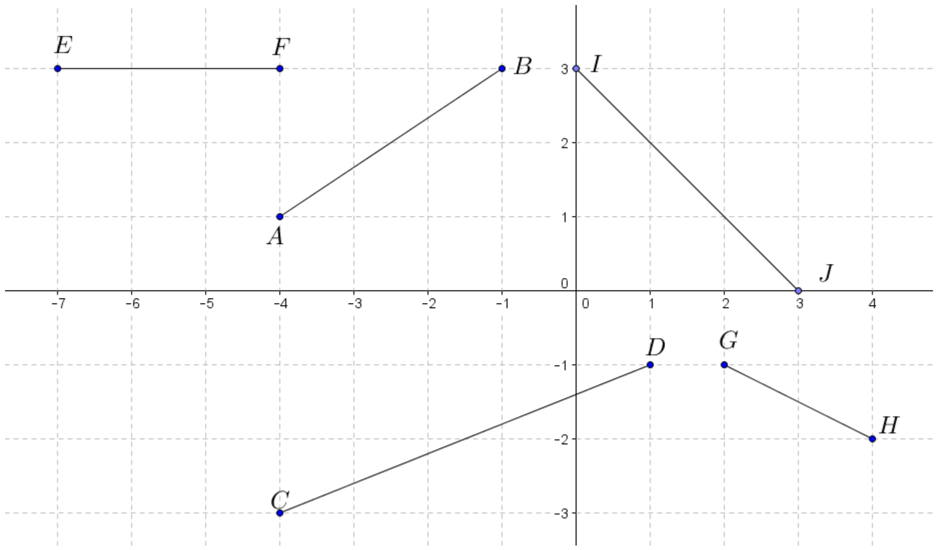
Ejemplo 3. *Determine la pendiente de la recta que se muestra en la figura.*



Solución Basta tomar dos puntos cualesquiera de esa recta, por ejemplo $B(5,2)$ y $N(1,-1)$:
$m_l = \dfrac{-1-2}{1-5} = \dfrac{3}{4}$
Note que si se toman otros dos puntos como $L(-3,-4)$ y $N(-1,1)$ se obtiene la misma pendiente:
$m = \dfrac{-1--4}{1--3} = \dfrac{3}{4}$
Cualquier otro segmento de la misma recta nos daría la misma pendiente.

Ejercicios

1. Determine la pendiente de cada segmento indicado en la siguiente figura:

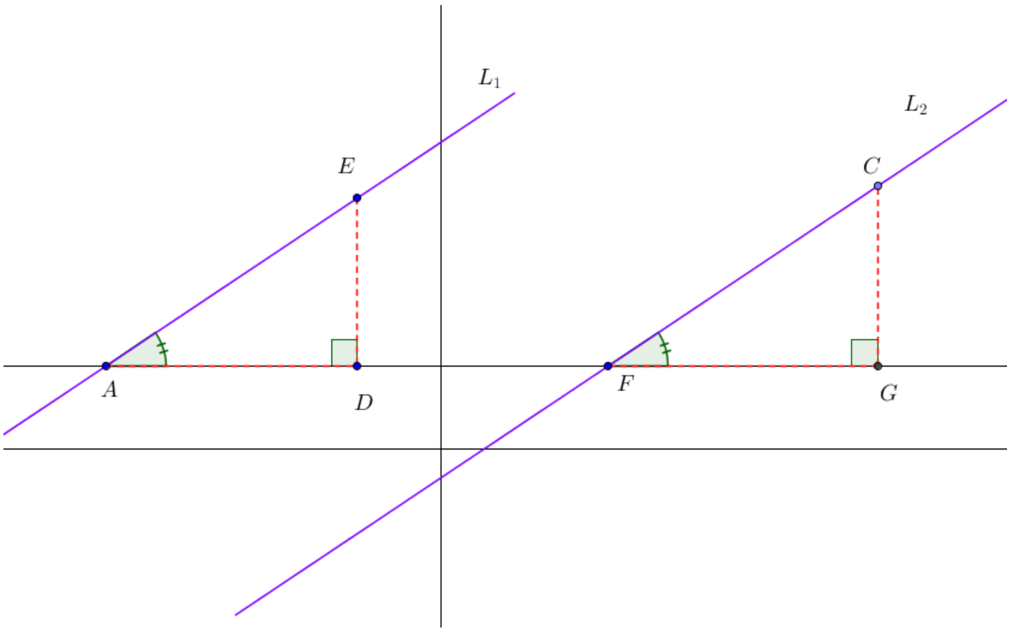


2. ¿Qué pares de puntos dados a continuación determinarán rectas horizontales? ¿Cuáles, rectas verticales?

a.	$(5,7)$ y$(-3,7)$	f.	$(4,7)$ y$(-2,6)$
b.	$(2,4)$ y$(4,-1)$	g.	$(0,0)$ y$(0,5)$
c.	$(5,2)$ y$(-3,5)$	h.	$(0,6)$ y$(3,0)$
d.	$(0,-1)$ y$(4,-1)$	i.	(a,b) y(a,c)
e.	$(3,3)$ y$(-3,3)$	j.	(a,b) y(c,b)

1.3. Rectas Paralelas

Recuerde que, en un mismo plano, dos rectas son paralelas si no se intersecan. Considere dos rectas paralelas L_1 y L_2 en el plano cartesiano con pendientes m_{l_1} y m_{l_2} respectivamente, se justificará que tienen la misma pendiente.



	Afirmación	Justificación
(1)	$\angle EAD \cong \angle CFG$	Ángulos correspondientes entre paralelas.
(2)	$\angle ADE \cong \angle FGC$	Ángulos rectos
(3)	$\triangle ADE \sim \triangle FGC$	Teorema de semejanza de triángulos AA.
(4)	$\dfrac{ED}{AD} = \dfrac{CG}{FG}$	(3), definicion de semejanza de triángulos.
(5)	$m_{l_1} = m_{l_2}$	Sustituyendo los valores en (4), Definición de pendiente

Notas

a. De manera similar se justifica para el caso de rectas decrecientes.

b. Como todos los segmentos de una recta tienen la misma pendiente, se pueden tomar los segmentos $\overline{AD} y \overline{FG}$ sobre la misma recta.

c. Si las rectas son horizontales, tienen la misma pendiente: cero.

d. También es verdadero que si dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas (no se justificará en este apunte).

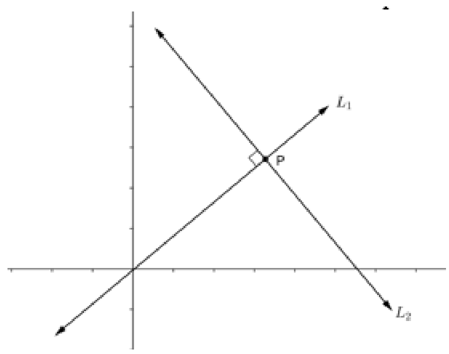
Con lo anterior se pueden enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1. *Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.*

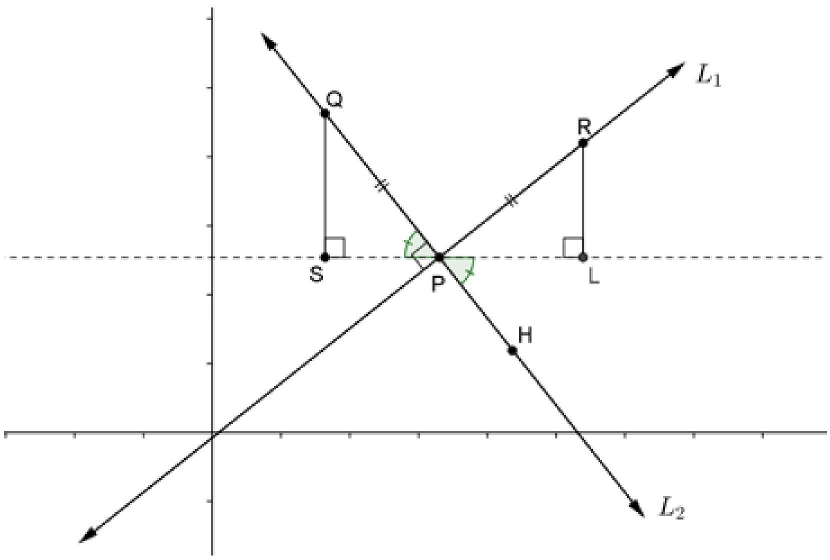
1.4. Rectas Perpendiculares

Recuerde que, en un mismo plano, dos rectas son perpendiculares si se intersecan formando ángulo recto. Considere dos rectas perpendiculares L_1 y L_2 que se intersecan en un punto P, con pendientes m_{L_1} y m_{L_2} respectivamente. Se analizará que sucede con las pendientes.

Situación 1. Suponga que tenemos dos rectas perpendiculares l_1 y l_2 (Con pendientes m_1 y m_2 respectivamente) que se intersecan en P. Considere además que ninguna es vertical.



Consideramos puntos Q en l_2 y R en l_1 (como en la figura siguiente) tales que $PQ = PR$. Note que se forman dos triángulos congruentes:



	Afirmación	Justificación
(1)	$\angle QPS \cong \angle LPH$	Opuestos por el vértice.
(2)	$m\angle SQP + m\angle QPS = 90$	Ángulos complementarios.
(3)	$m\angle RPL + m\angle LPH = 90$	Ángulos complementarios, rectas perpendiculares.
(4)	$m\angle SQP + m\angle QPS = m\angle RPL + m\angle LPH$	(2),(3), transitividad.
(5)	$m\angle SQP = m\angle RPL$	(1) Cancelado
(6)	$PQ = PR$	Construcción .
(7)	$\angle S \cong \angle L$	Ángulos rectos
(8)	$\triangle QSP \cong \triangle PLR$	Teorema Congruencia LAL, (5),(6),(7)
(9)	$\dfrac{QS}{SP} = \dfrac{PL}{LR}$	Definición de congruencia
(10)	$m_l = \dfrac{LR}{PL}$	Definición de pendiente de una recta
(11)	$m_2 = \dfrac{-QS}{SP}$	Definición de pendiente de una recta
(12)	$m_1 = \dfrac{-1}{m_2}$	(9),(10),(11)
(13)	$m_1 \cdot m_2 = -1$	Propiedades de $\mathbb{R}$

*Conclusión:*Si dos rectas perpendiculares tienen pendientes , entonces $m_1 \cdot m_2 = -1$

Situación 2. Haciendo la justificación de manera inversa se puede concluir que si se tienen dos rectas tales que $m_1 \cdot m_2 = -1$, entonces estas rectas son perpendiculares. De las situaciones 1 y 2 se llega al siguiente teorema:

Teorema 2. *Dos rectas no verticales son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a* -1

1.5. Ecuación de una recta

Caso 1. Rectas Verticales:

Si una recta es vertical e intersexa al eje X en $(a, 0)$, entonces su ecuación es $x = a$. (La coordenada y de cualquier punto de ella es 0) .

Caso 2. Rectas NO Verticales:

Para rectas no verticales se necesita el concepto de pendiente. Suponga que una recta L tiene pendiente m y pasa por el punto (x_1, y_1) . Sea (x, y) cualquier punto de L. Se puede determinar la relación entre la coordenada x y la coordenada y de un punto (x, y) cualquiera de L de la siguiente manera: Usamos la definición de pendiente de L para $(x_1, y_1), (x, y)$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y - y_1}{x - x_1} \\ &\Longleftrightarrow m(x - x_1) = (y - y_1) \\ &\Longleftrightarrow y = m \cdot (x - x_1) + y_1 \end{aligned}$$

Esta última ecuación se denomina *Ecuación punto-pendiente de la recta*

Ejemplo 4. *determine la ecuación de una recta L con pendiente 5 que pasa por* $(-2,3)$.

Solución: Si (x,y) es cualquier otro punto de L entonces, por la definición de pendiente se tiene:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y-3}{x--2} = 5 \\
&\iff y-3 = 5(x+2) \\
&\iff y = 5x+10+3 \\
&\iff y = 5x+13
\end{aligned}
$$

Retomando lo discutido antes del ejemplo, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 3. *Sea L una recta con pendiente m que por* (x_1,y_1)*. Entonces todo punto* (x,y) *de L satisface la ecuación* $y-y_1 = m(x-x_1)$*.*

Notas

a. El teorema anterior justifica que todo punto (x,y) de L satisface la ecuación $y-y_1 = m(x-x_1)$.

b. Análogamente se puede justificar que todo (x,y) que satisface a la ecuación $y-y_1 = m(x-x_1)$ está en L.

   Por lo discutido en 1 y 2 se tiene que:

c. Se dice que L es la gráfica de la ecuación $y-y_1 = m(x-x_1)$.

   Ejemplo 5. *trace la gráfica de la ecuación* $y-2 = 3(x-4)$

   Solución: como tiene la forma ecuación punto pendiente, la gráfica es una recta L.
   Se sabe de la geometría Euclidea que dados dos puntos cualesquiera, hay una única recta que los contiene. Entonces para graficar esa ecuación basta tomar dos puntos cualesquiera que las satisfagan.

a. Para $x=1$ tenemos:

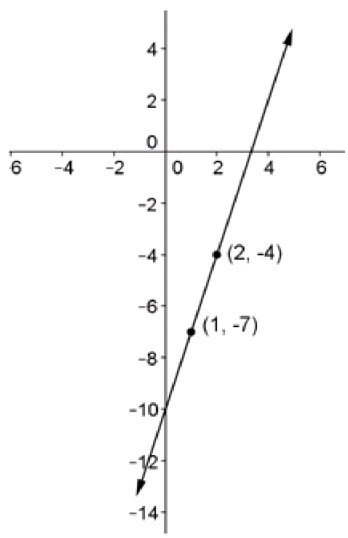
$$
\begin{aligned}
& y-2 = 3\cdot(1-4) \\
\Rightarrow\ & y-2 = -9 \\
\Rightarrow\ & y = -7
\end{aligned}
$$

Entonces $(1,-7)$ está en L

b. Para $x=2$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
& y-2 = 3\cdot(2-4) \\
\Rightarrow\ & y-2 = -6 \\
\Rightarrow\ & y = -4
\end{aligned}
$$

Entonces $(2,-4)$ está en L



Nota: Si en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se toma $x_1 = 0$ y $y_1 = b$, la ecuación sería :

$$\begin{aligned} y - b &= m \cdot (x - 0) \\ &\Rightarrow y - b = mx \\ &\Rightarrow y = mx + b \end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una recta con pendiente m que pasa por $(0, b)$.

Ejemplo 6. *La gráfica de la ecuación* $y = 3x - 4$ *es una recta con pendiente 3 que pasa por* $(0, -4)$

Nota: La ecuación de la recta, se puede transformar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ &\Rightarrow y = m(x - x_1) + y_1 \\ &\Rightarrow y = mx - mx_1 + y_1 \end{aligned}$$

Tomando $b = -mx_1 + y_1$, dicha ecuación se puede escribir de la forma $y = mx + b$ La última ecuación es la forma usual de escribir la ecuación de una recta.

Ejemplo 7. *Determine la ecuación de la recta que contiene los puntos de coordenadas* $(1, 3)$ *y* $(2, -5)$.

Solución. Como se tienen dos puntos, la pendiente se puede obtener con la fórmula:
$m = \dfrac{-5 - 3}{2 - 1} = \dfrac{-8}{1} = -8$
Considerando el valor de la pendiente y cualquiera de los pares ordenados, se puede obtener (de la ecuación $y = mx + b$) el valor de b. Sustituyendo el punto $(1, 3)$ y $m = -8$ tenemos:
$y = mx + b$
$\Rightarrow 3 = -8 \cdot 1 + b$
$\Rightarrow b = 11$

2. La Parábola y la Circunferencia

2.1. La gráfica de la Ecuación $y = x^2$

Cuando se habla de la gráfica de una ecuación con dos incógnitas, se hace referencia a la representación en el plano del conjunto formado por todos los pares ordenados (x, y) que son solución de esa ecuación. En el caso de $y = x^2$ se deben representar todos los pares ordenados en los cuales la ordenada es el cuadrado de la abscisa, es decir, los pares de la forma (x, x^2) para cualquier número real x. Como la cantidad de pares ordenados de esta forma es infinita (uno por cada número real x) se puede empezar por elaborar una tabla de valores con números enteros como la siguiente:

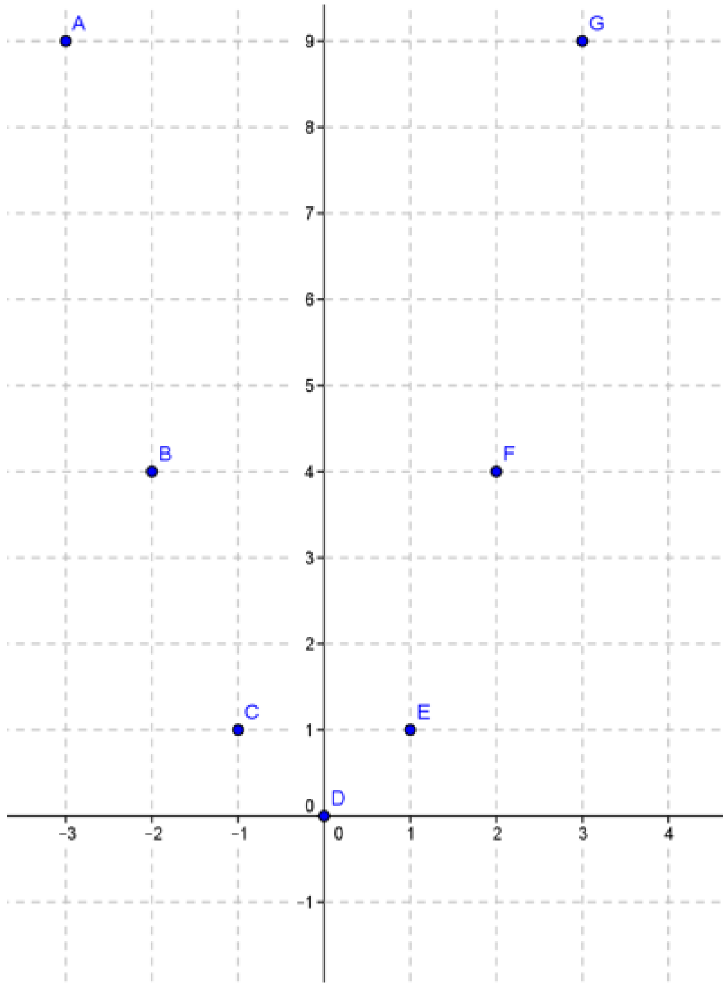
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$

Es importante notar que los siguientes dos aspectos:

a. El cuadrado de un número real es un número mayor o igual que cero, por lo tanto la gráfica que se pretende construir no puede tener puntos en los cuadrantes III y IV.

b. El único número cuyo cuadrado es 0 es precisamente 0, por lo tanto la única intersección con el Eje X sería el origen del sistema de coordenadas pues como $0^2 = 0$ entonces se tiene el punto de coordenadas $(0, 0)$ en la gráfica como se puede ver en la tabla anterior.

c. Debido a que dos números opuestos tienen el mismo cuadrado: $a^2 = (-a)^2$, para cada par ordenado de la forma (a, a^2) se va a tener también el par $(-a, a^2)$, lo cual se va a ver en la gráfica como una simetría respecto al Eje Y como se puede observar en la siguiente representación:

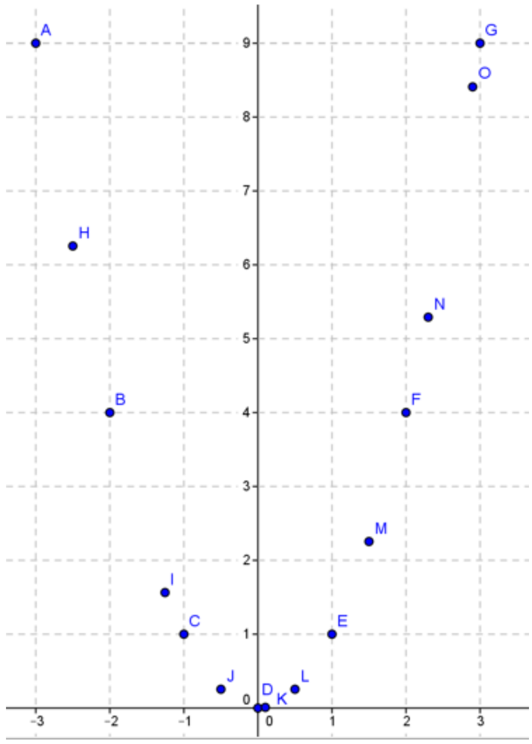


D es el único punto en el $Eje\ X$.
La gráfica va a ser simétrica respecto al $Eje\ Y$: por ejemplo B y F son simétricos respecto al $Eje\ Y$ (tienen la misma ordenada y las abscisas son opuestas).

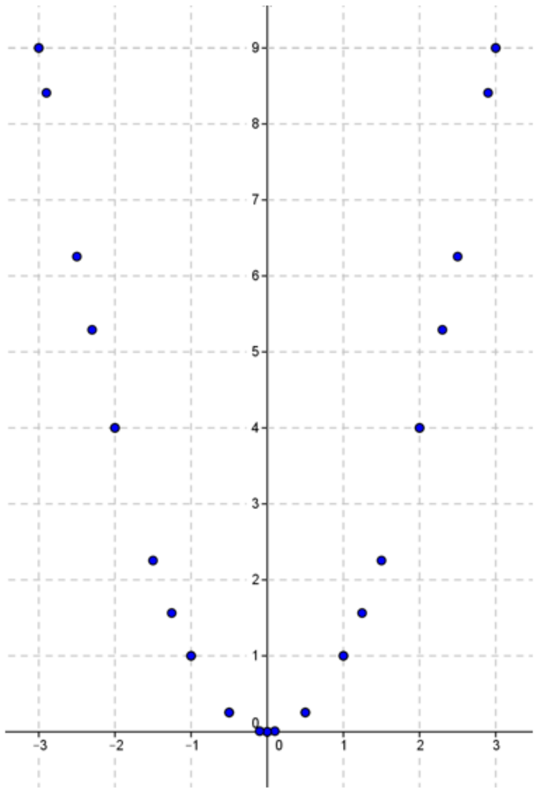
La gráfica anterior es una **primera aproximación** a la representación de la ecuación $y = x^2$ pues únicamente se utilizaron valores enteros para x desde -3 hasta 3. Sin embargo, la variable x puede asumir cualquier valor real. Por ejemplo note en ejemplo la siguiente tabla con otros valores racionales entre -3 y 3:

x	-2.5	-1.25	-0.5	0.1	$\frac{1}{2}$	1.5	2.3	2.9
x^2	6.25	1.5625	0.25	0.01	0.25	2.25	5.29	8.41
(x, x^2)	(-2.5 , 6.25)	(-1.25,1.5625)	(-0.5,0.25)	(0.1 ,0.01)	($\frac{1}{2}$,0.25)	(1.5,2.25)	(2.3,5.29)	(2.9, 8.41)

Si se agregan estos nuevos puntos a la gráfica anterior se obtiene la siguiente:



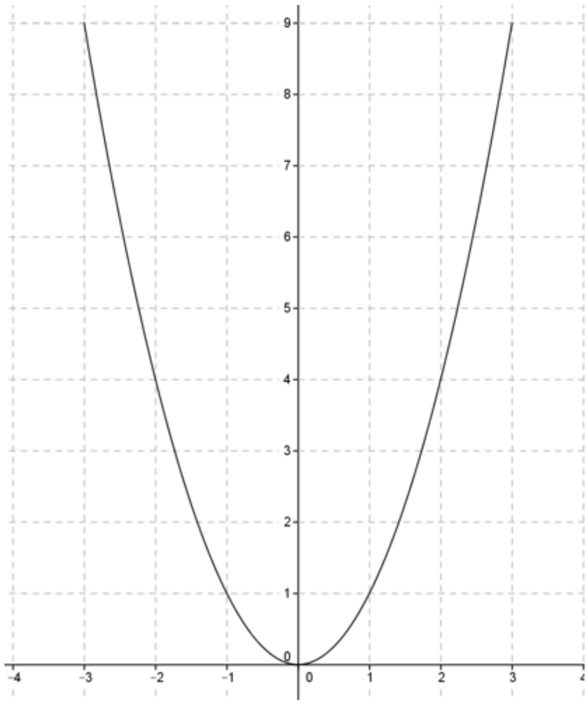
Como se comentó anteriormente, por cada punto de esta gráfica debe también tenerse al simétrico respecto al eje Y. Si se quitan las etiquetas de los puntos y se agregan los simétricos faltantes para los puntos dados se obtiene la siguiente representación:



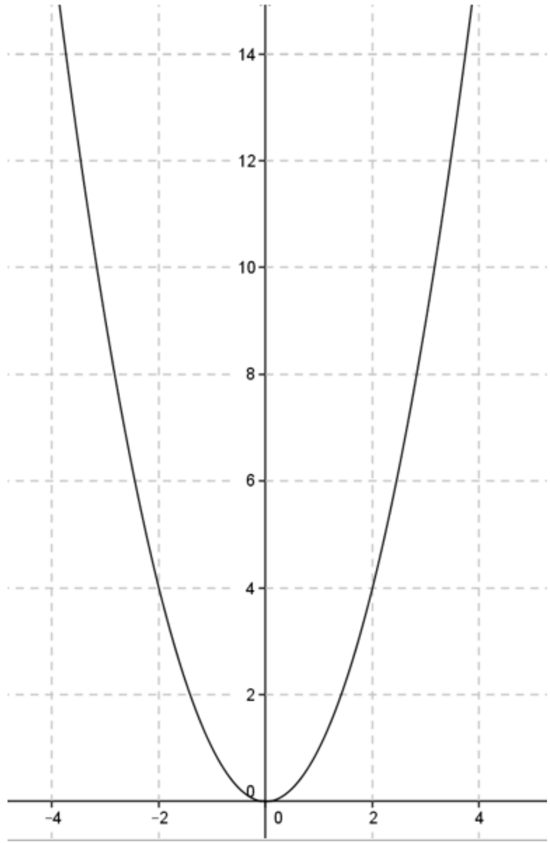
A pesar de que esta gráfica tiene más puntos que la anterior, sigue siendo incompleta pues solamente se han utilizado 21 puntos (para 21 valores de x). La gráfica también debería contener puntos para cualquier otro número real. Debido a la imposibilidad de representar todos los números reales en una misma gráfica y poder observarla de forma completa, se debe seleccionar un intervalo de visualización. En este caso se seguirá trabajando con el intervalo $[-3, 3]$ pero se agregarán los demás puntos siguiendo el patrón ya identificado con los anteriores. Por ejemplo, deben contemplarse los siguientes pares ordenados correspondientes a valores irracionales de la variable x:

x	$-\sqrt{8{,}9}$	-2e	$-\frac{\pi}{2}$	-$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{8{,}9}$
x^2	8.9	$4e^2$	$\frac{\pi^2}{4}$	2	2	$\frac{x^2}{4}$	$4e^2$	8.9
(x, x^2)	$(-\sqrt{8{,}9}, 8{,}9)$	(-2e, $4e^2$)	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4})$	$(-\sqrt{2}$,2)	($\sqrt{2}$,2)	$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4})$	($\sqrt{2}$,2)	($\sqrt{8{,}9}$,8.9)

La gráfica de la ecuación $y = x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$ se ve de la siguiente manera:



Si se amplía el intervalo de visualización de esta gráfica se puede por ejemplo obtener la siguiente:



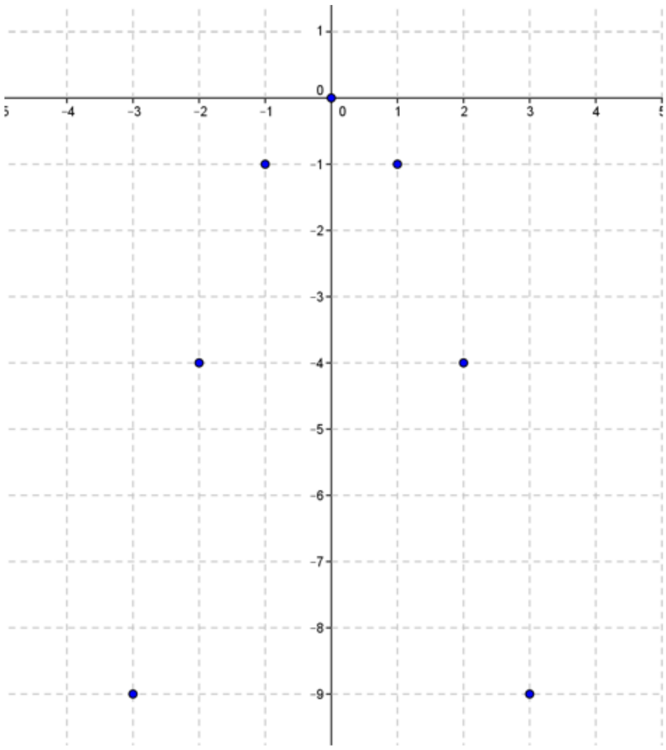
A curvas con esta forma se les llama parábolas cóncavas hacia arriba. En esta el rango (conjunto de valores de las ordenadas de todos los pares ordenadas) es $[0, +\infty[$.

2.2. La gráfica de la Ecuación $y = -x^2$

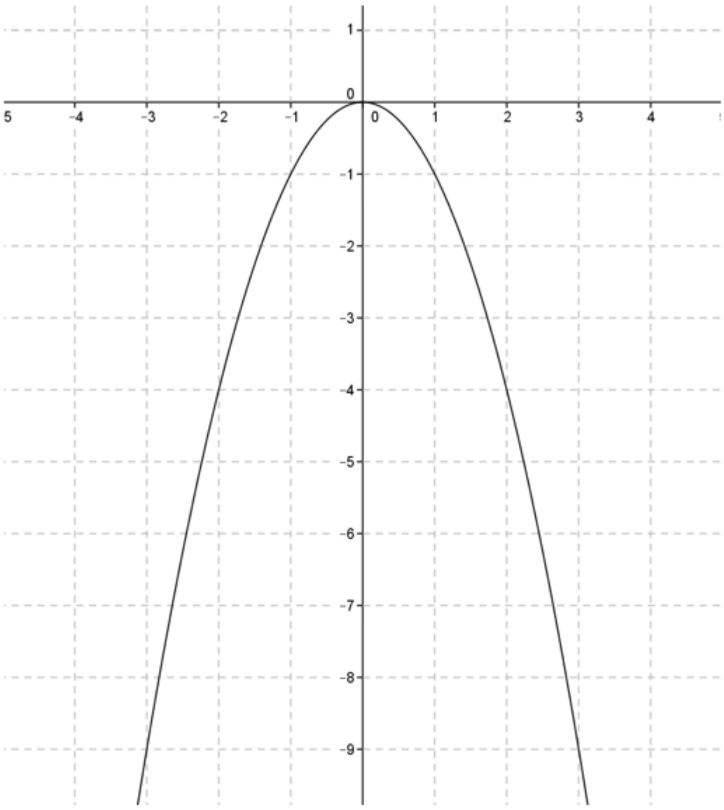
Ahora se considerará la ecuación $y = -x^2$. Observe que las soluciones de esta ecuación son pares ordenados en los cuales la ordenada es el opuesto del cuadrado de la abscisa, es decir, tienen la forma $(x, -x^2)$. En este caso los valores de la ordenada no pueden ser positivas, razón por la cual la gráfica no puede tener puntos en los cuadrantes I y II. Si se compara esta ecuación con $y = x^2$, se puede notar que para cada valor de x el nuevo valor de y es el opuesto del que se obtuvo anteriormente, como se puede observar en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$(x, -x^2)$	$(-3, -9)$	$(-2, -4)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, -4)$	$(3, -9)$

Al representar estos pares ordenados de la tabla anterior en un sistema de coordenadas cartesianas se obtiene lo siguiente:



Nuevamente esta gráfica es incompleta pues debe existir un punto para cada número real x. La gráfica de $y = -x^2$ se puede obtener reflejando respecto al eje X la gráfica de $y = x^2$ construida anteriormente, por lo que se obtiene la siguiente parábola cóncava hacia abajo:



2.3. La gráfica de la Ecuación $y = x^2 + k$

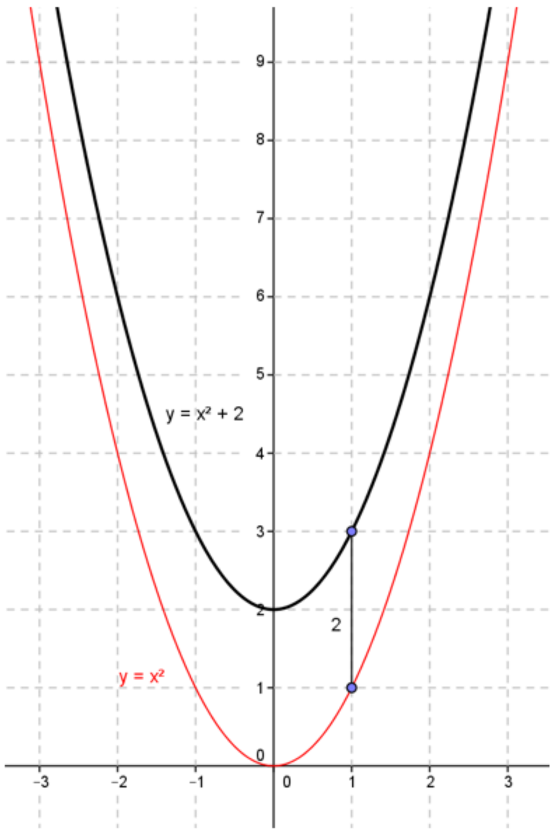
Si k es un número real cualquiera y consideramos la ecuación $y = x^2 + k$, la tabla de valores correspondiente a esta nueva ecuación se puede obtener de la de $y = x^2$ sumando k a las ordenadas correspondientes a cada uno de los valores de las abscisas como se muestra en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$x^2 + \mathbf{k}$	$9 + \mathbf{k}$	$4 + \mathbf{k}$	$1 + \mathbf{k}$	$0 + \mathbf{k}$	$1 + \mathbf{k}$	$4 + \mathbf{k}$	$9 + \mathbf{k}$
$(x, x^2 + \mathbf{k})$	$(-3, 9 + \mathbf{k})$	$(-2, 4 + \mathbf{k})$	$(-1, 1 + \mathbf{k})$	$(0, 0 + \mathbf{k})$	$(1, 1 + \mathbf{k})$	$(2, 4 + \mathbf{k})$	$(3, +\mathbf{k})$

A continuación se muestran los casos particulares cuando $k = 2$ o $k = -4$, las tablas y gráficas que se obtienen son las siguientes: Para k=2:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$x^2 + 2$	11	6	3	2	3	6	11
$(x, x^2 + 2)$	$(-3, 11)$	$(-2, 6)$	$(-1, 3)$	$(0, 2)$	$(1, 3)$	$(2, 6)$	$(3, 9)$

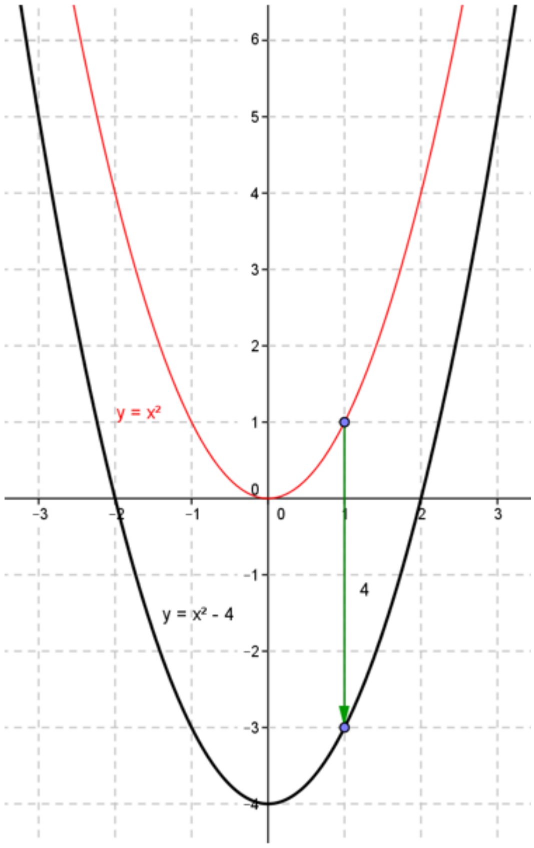
En este caso, como las ordenadas aumentan en dos unidades, para cada valor de x, entonces la gráfica se puede obtener a partir de la de $y = x^2$, trasladándola dos unidades hacia arriba:



La nueva parábola también es cóncava hacia arriba pero ahora no interseca al eje X. El rango para esta ecuación es el intervalo $[2, +\infty[$. Para k=-4:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$x^2 - 4$	5	0	-3	-4	-3	0	5
$(x, x^2 - 4)$	$(-3, 5)$	$(-2, 0)$	$(-1, -3)$	$(0, -4)$	$(1, -3)$	$(2, 0)$	$(3, 5)$

En este caso, como las ordenadas disminuyen en cuatro unidades, para cada valor de x, entonces la gráfica se puede obtener a partir de la de $y = x^2$, trasladándola cuatro unidades hacia debajo de modo que resulta una parábola cóncava hacia arriba cuyo rango es $[-4, +\infty[$



En general, la gráfica de $y = x^2 + k$ se puede obtener a partir de la gráfica de $y = x^2$ mediante una traslación vertical de $|k|$ unidades, hacia arriba si k es positivo, o hacia abajo si es negativo.

Ejercicio 1. *Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones. Para cada una de ellas indique el rango, la intersección con el eje Y y la cantidad de intersecciones con el eje X.*

a. $y = x^2 + 4$

b. $y = x^2 - 9$

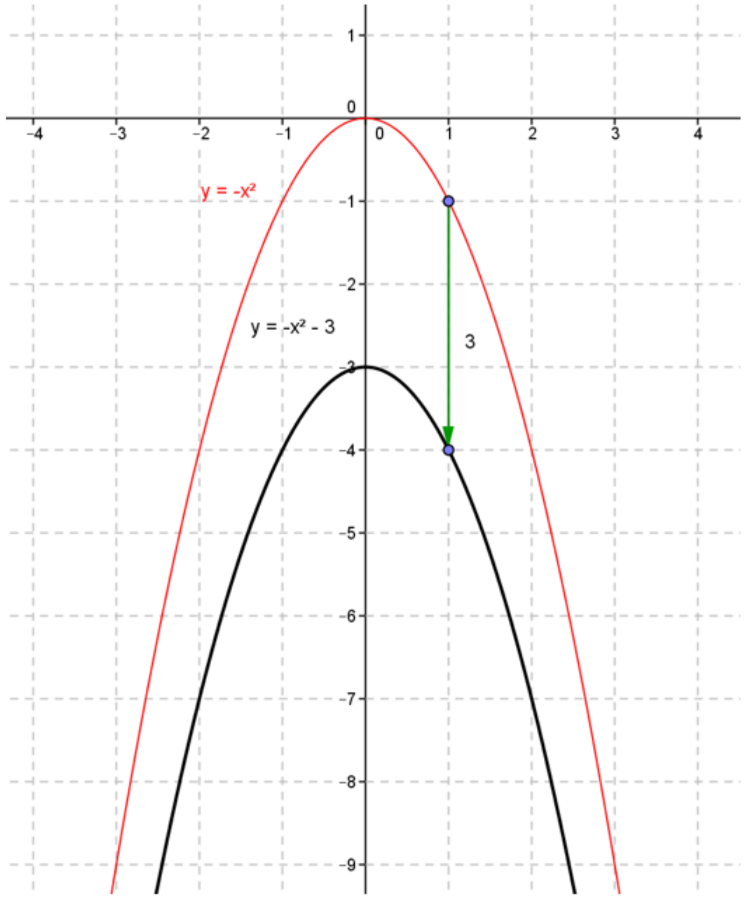
Ejercicio 2. *Indique la ecuación de la gráfica que se obtiene al trasladar la parábola de ecuación $y = x^2$ tres unidades hacia abajo. ¿En qué puntos interseca esta parábola a los ejes del sistema de coordenadas?*

2.4. La gráfica de la Ecuación $y = -x^2 + k$

De forma similar como se trabajó en la sección anterior, si k es un número real cualquiera, la gráfica de una ecuación que tiene la forma $y = -x^2 + k$ se puede obtener a partir de la gráfica de $y = x^2$ mediante una traslación vertical de $|k|$ unidades, hacia arriba si k es positivo, o hacia abajo si es negativo. Por ejemplo, si $k = -3$ se tienen la siguiente tabla de valores de referencia:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(x, -x^2)$	$(-3, -9)$	$(-2, -4)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(2, -4)$	$(3, -9)$
$-x^2 - 3$	-12	-7	-1	-3	-4	-7	-12
$(x, -x^2 - 3)$	$(-3, -12)$	$(-2, -7)$	$(-1, -4)$	$(0, -3)$	$(1, -4)$	$(2, -7)$	$(3, -12)$

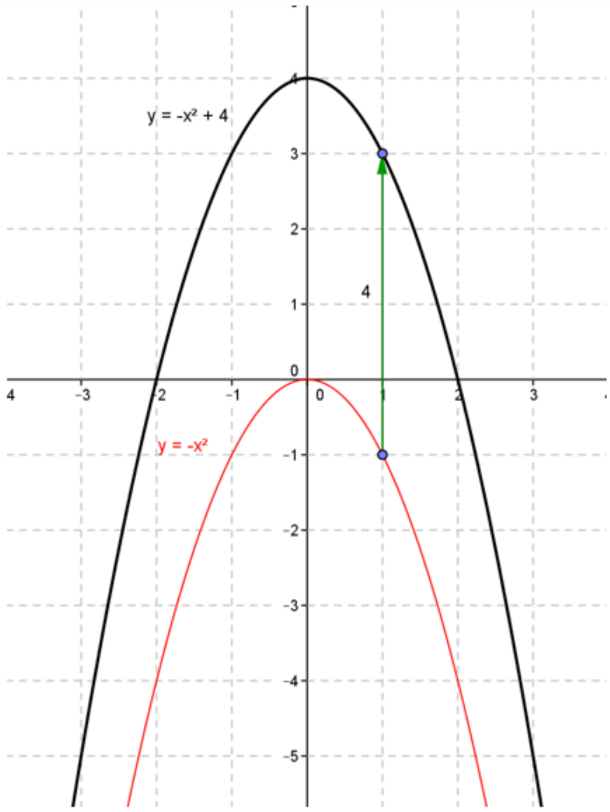
Es importante notar en este caso que como x^2 es un número real mayor o igual que cero, $-x^2-3$ debe ser un número menor o igual que -3, lo cual se puede observar en la gráfica de la ecuación, la cual corresponde a una parábola cóncava hacia abajo que no interseca al eje X y cuyo rango es el intervalo $]-\infty, -3]$:



Por otra parte, si $k = 4$ se tienen la siguiente tabla de valores de referencia:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$(x, -x^2)$	$(-3, -9)$	$(-2, -4)$	$(-1, -1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(2, -4)$	$(3, -9)$
$-x^2+4$	-5	0	3	4	3	0	-5
$(x, -x^2+4)$	$(-3, -5)$	$(-2, 0)$	$(-1, 3)$	$(0, 4)$	$(1, 3)$	$(2, 0)$	$(3, -5)$

Para esta ecuación es importante tomar en cuenta que tanto cuando $x = 2$ como cuando $x = -2$ las soluciones se completan con y =0, por lo tanto su gráfica interseca al eje Xdos veces. Además,$-x^2 + 4 = 4 - x^2$ es un número menor o igual que 4 para cualquier valor de x. La gráfica de esta ecuación es una parábola cóncava hacia abajo cuyo rango es el intervalo $]-\infty, 4]$ como se puede observar en la siguiente figura:



Ejercicio 3. *Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones. Para cada una de ellas indique el rango, la intersección con el eje Y y la cantidad de intersecciones con el eje X.*

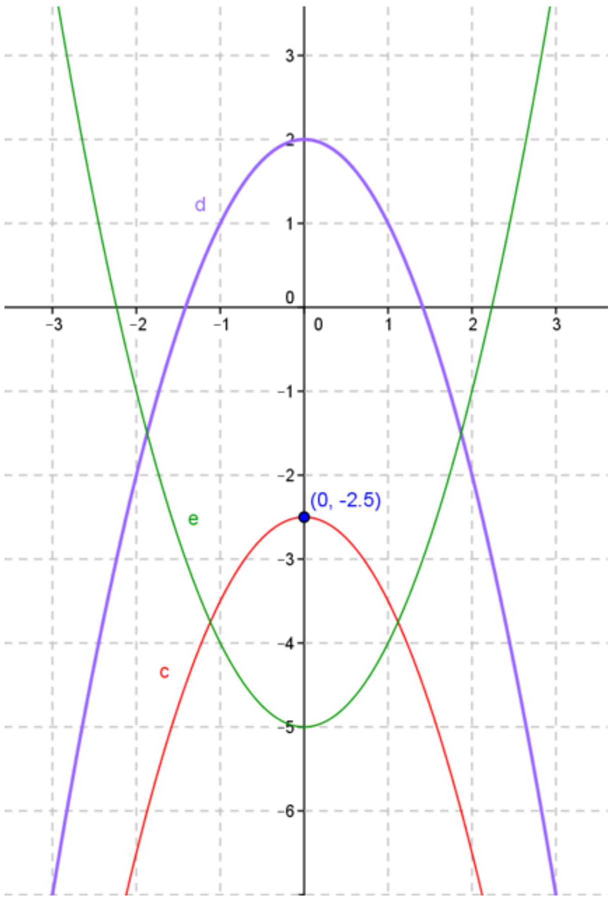
a) $y = -x^2 - 7$

b) $y = -x^2 + 9$

Ejercicio 4. *Indique la ecuación de la gráfica que se obtiene al reflejar respecto al eje X la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 6$. ¿En qué puntos interseca esta parábola a los ejes del sistema de coordenadas?*

Ejercicio 5. *Para cada una de las parábolas graficadas anteriormente indique si existe una recta que sea un eje de simetría.*

Ejercicio 6. *Indique la ecuación de cada una de las parábolas de la siguiente gráfica si se sabe que todas se obtuvieron mediante traslaciones verticales o reflexiones respecto al eje X a partir de la parábola de la ecuación $y = x^2$.*



2.5. La gráfica de una ecuación de la forma $y = (x - h)^2$

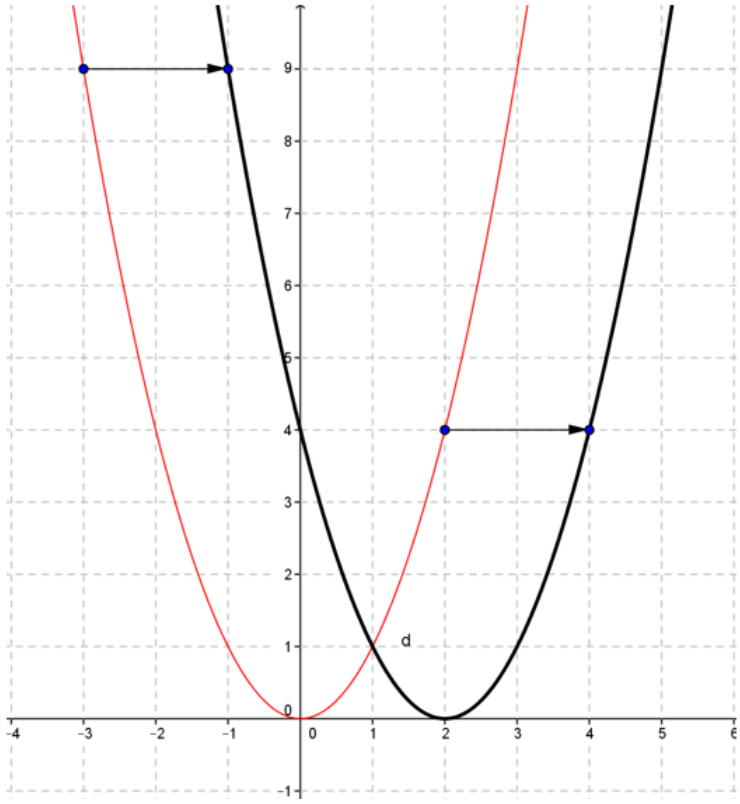
Si k es un número real cualquiera y consideramos la ecuación $y = (x - h)^2$, la tabla de valores correspondiente a esta nueva ecuación se puede obtener de la de $y = x^2$ como se muestra en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$(x - h)^2$	$(-3 - h)^2$	$(-2 - h)^2$	$(-1 - h)^2$	$(0 - h)^2$	$(1 - h)^2$	$(2 - h)^2$	$(3 - h)^2$
$(x, (x - h)^2)$	$(-3, (-3 - h)^2)$	$(-2, (-2 - h)^2)$	$(-1, (-1 - h)^2)$	$(0, (0 - h)^2)$	$(1, (1 - h)^2)$	$(2, (2 - h)^2)$	$(3, (3 - h)^2)$

A continuación se muestran los casos particulares cuando $k = 2$ o $k = -1$, las tablas y gráficas que se obtienen son las siguientes: Para $k = 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$(x - 2)^2$	$(-5)^2$	$(-4)^2$	$(-3)^2$	$(2)^2$	$(-1)^2$	$(0)^2$	$(1)^2$
$(x, (x - 2)^2)$	$(-3, 25)$	$(-2, 16)$	$(-1, 9)$	$(0, 4)$	$(1, 1)$	$(2, 0)$	$(3, 1)$

En este caso, como las abscisas disminuyen dos unidades, se obtiene la misma ordenada para una abscisa 2 unidades mayor que la correspondiente a la misma ordenada en la ecuación $y = x^2$, entonces la gráfica se puede obtener a partir de la de $y = x^2$, trasladándola dos unidades hacia la derecha:

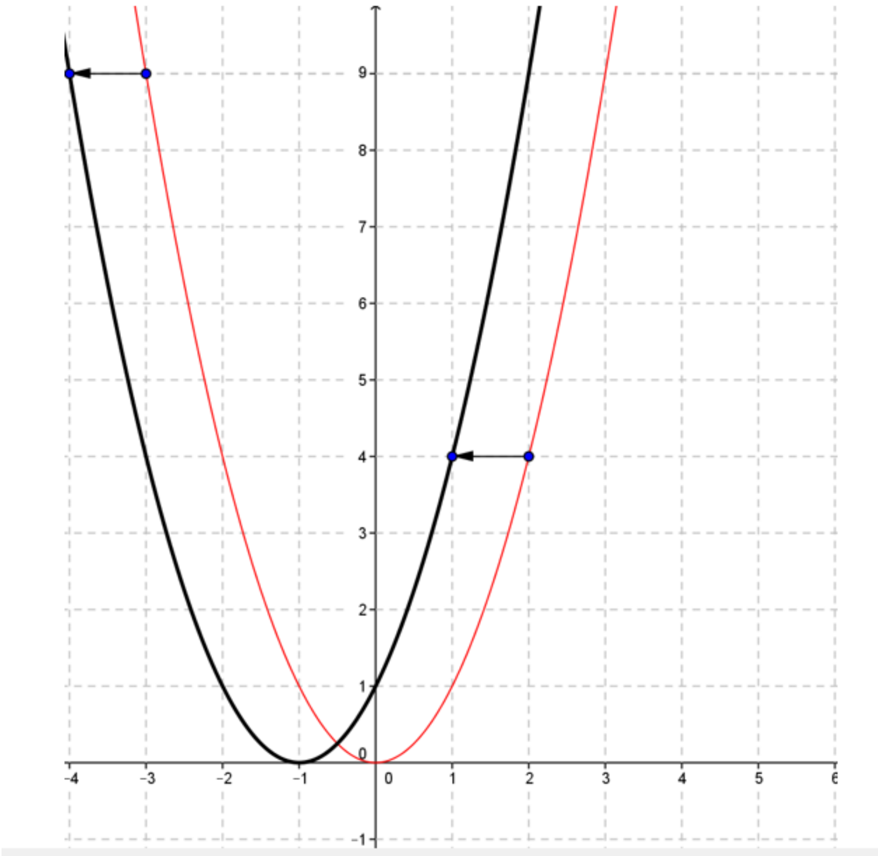


Con respecto a esta transformación es importante notar que tanto x^2 como $(x-2)^2$ son cantidades mayores o iguales que cero para cualquier valor de x. Como la transformación de la gráfica corresponde a una traslación horizontal, el rango de la curva sigue siendo el intervalo $[0, +\infty[$. También se puede observar que la parábola mantiene la propiedad de ser simétrica respecto a una recta vertical, pero ya no se trata del eje Y (recta de ecuación $x = 0$) sino de la recta de ecuación $x = 2$

Por otra parte, si $k = -1$ se tienen la siguiente tabla de valores de referencia:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$(x - -1)^2$	$(-2)^2$	$(-1)^2$	$(0)^2$	$(1)^2$	$(2)^2$	$(3)^2$	$(4)^2$
$(x, (x+1)^2)$	$(-3, 4)$	$(-2, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 4)$	$(2, 9)$	$(3, 16)$

En este caso, como las abscisas aumenta una unidad, se obtiene la misma ordenada para una abscisa 1 unidad menor que la correspondiente a la misma ordenada en la ecuacón $y = x^2$, entonces la gráfica se puede obtener a partir de la de $y = x^2$, trasladándola una unidad hacia la izquierda, de modo que el eje de simetría es ahora la recta de ecuación $x = -1$:

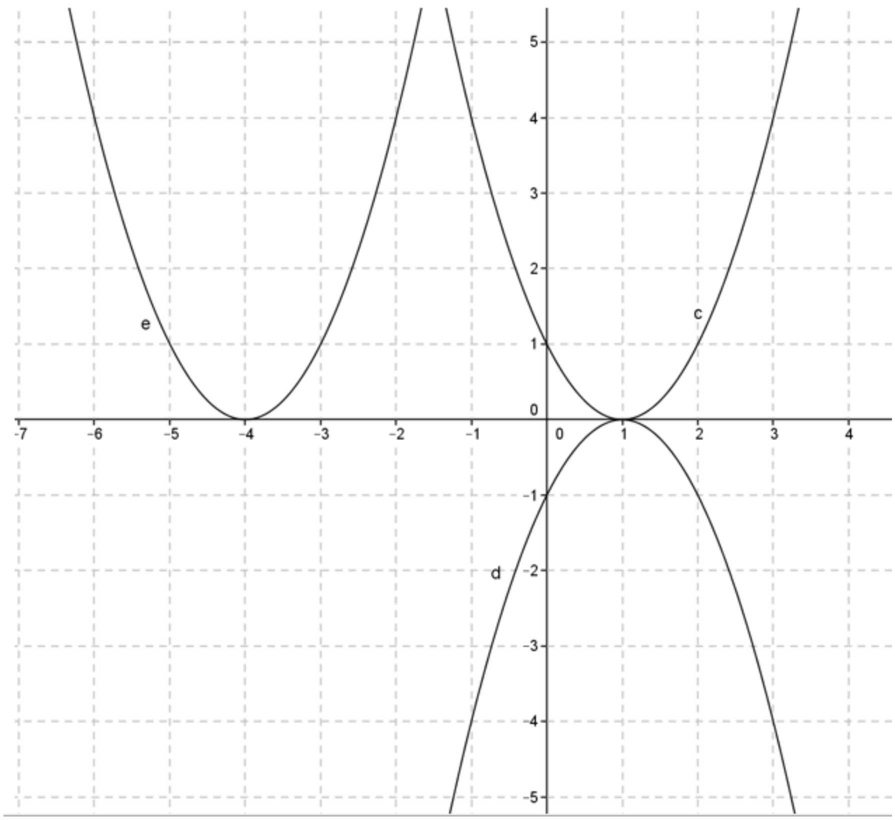


Ejercicio 7. *Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones. Para cada una indique las intersecciones con los ejes, la ecuación del eje de simetría y el rango:*

a) $y = (x-3)^2$ **b)** $y = (x+3)^2$

Ejercicio 8. *Indique la ecuación de la parábola que se obtiene al reflejar respecto al eje X la de ecuación $y = (x+1)^2$. ¿Cuál es el rango de cada una de estas dos curvas?*

Ejercicio 9. *Determine la ecuación de cada una de las siguientes parábolas:*



Ejercicio 10. *Indique una ecuación para la parábola cóncava hacia arriba cuyo vértice es el punto de coordenadas (5,0) e interseca al eje Y en el punto (0,25).*

Ejercicio 11. *Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones. Para cada una indique las intersecciones con los ejes, la ecuación del eje de simetría y el rango:*

a) $y = -\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$ **b)** $y = -\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2$

Ejercicio 12. *Indique cómo se obtiene, a partir de la gráfica de la ecuación $y = x^2$, la gráfica de $y = -(x-h)^2$. ¿ Cuál es el rango, el vértice y el eje de simetría para esta curva?*

2.6. La gráfica de una ecuación de la forma $y = ax^2$

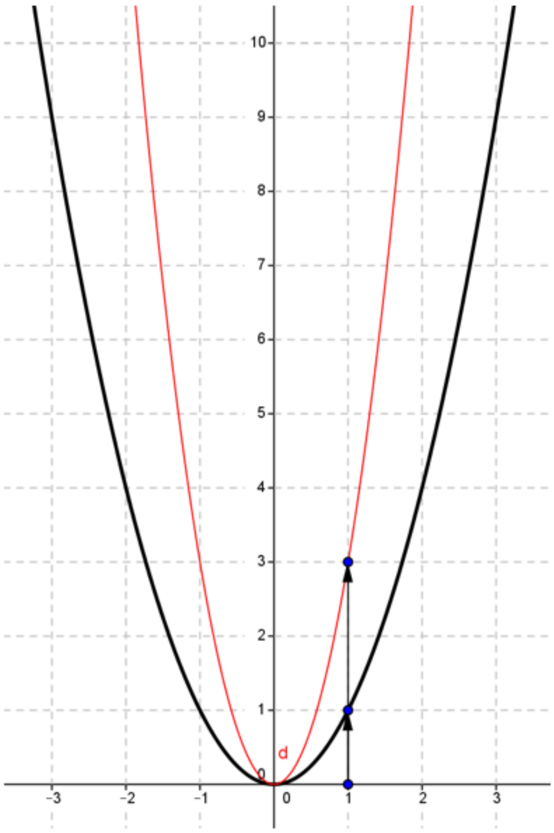
Si a es un número real diferente de cero y consideramos la ecuación $y = ax^2$, la tabla de valores correspondiente a esta nueva ecuación se puede obtener de la de $y = x^2$ como se muestra en la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
ax^2	$a(-3)^2$	$a(-2)^2$	$a(-1)^2$	$a(0)^2$	$a(1)^2$	$a(2)^2$	$a(3)^2$
(x, ax^2)	$(-3, 9a)$	$(-2, 4a)$	$(-1, a)$	$(0, 0)$	$(1, a)$	$(2, 4a)$	$(3, 9a)$

Observe que cuando $a = 1$ la parábola no sufre ninguna transformació y cuando $a = -1$ la ecuación resultante es $y = -x^2$, cuya gráfica se construyó anteriormente y, como se señaló, se obtiene reflejando respecto al eje X la gráfica de la ecuación $y = x^2$. A continuación se muestran los casos particulares cuando $a = 3$ o $a = -2$, las tablas y gráficas que se obtienen son las siguientes:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$3x^2$	$3(-3)^2$	$3(-2)^2$	$3(-1)^2$	$3(0)^2$	$3(1)^2$	$3(2)^2$	$3(3)^2$
$(x, 3x^2)$	$(-3, 27)$	$(-2, 12)$	$(-1, 3)$	$(0, 0)$	$(1, 3)$	$(2, 12)$	$(3, 27)$

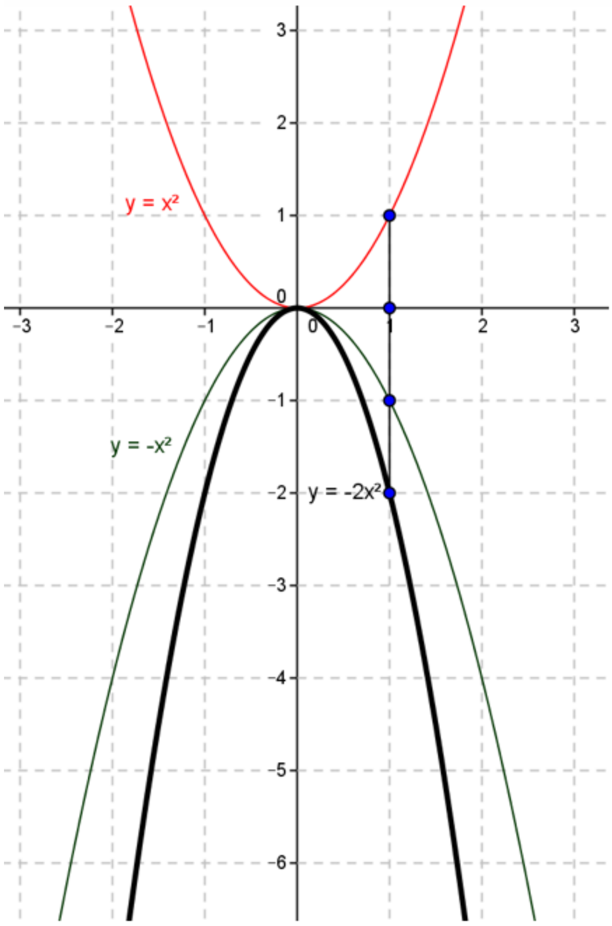
Cuando $a = 3$, las ordenadas correspondientes a cada valor de x son el triple de la respectiva en la ecuación inicial. Gráficamente, los puntos de la nueva curva correspondientes a un valor de x determinado, están al triple de distancia del eje X, si se comparan con los puntos asociados a la misma abscisa pero en la parábola original:



Cuando $a = -2$ se tiene la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
(x, x^2)	$(-3, 9)$	$(-2, 4)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, 1)$	$(2, 4)$	$(3, 9)$
$-2x^2$	$-2(3)^2$	$-2(-2)^2$	$-2(-1)^2$	$-2(0)^2$	$-2(1)^2$	$-2(2)^2$	$-2(3)^2$
$(x, -2x^2)$	$(-3, -18)$	$(-2, -8)$	$(-1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, -2)$	$(2, -8)$	$(3, -18)$

Como se puede observar, los valores de y son negativos para cualquier valor de x diferente de 0. Por lo tanto, la gráfica debe ser una parábola cuyos puntos se ubican en los cuadrantes III y IV, además del origen del sistema de coordenadas. Gráficamente, los puntos de la nueva curva correspondientes a un valor de x determinado, están al doble de distancia del eje X, si se comparan con los puntos asociados a la misma abscisa pero en la parábola original, pero en el sentido contrario, es decir la parábola es cóncava hacia abajo:



En general, cuando $a > 0$ se pude decir que la gráfica de $y = ax^2$ se puede obtener a partir de la gráfica de $y = x^2$ mediante una trasformación vertical (se expande si a>1 y se comprime si $0 < a < 1$ por un factor a y en el caso en que $a < 0$, además hay una reflexión respecto al eje X por lo que cambia la concavidad de la gráfica (hacia abajo).

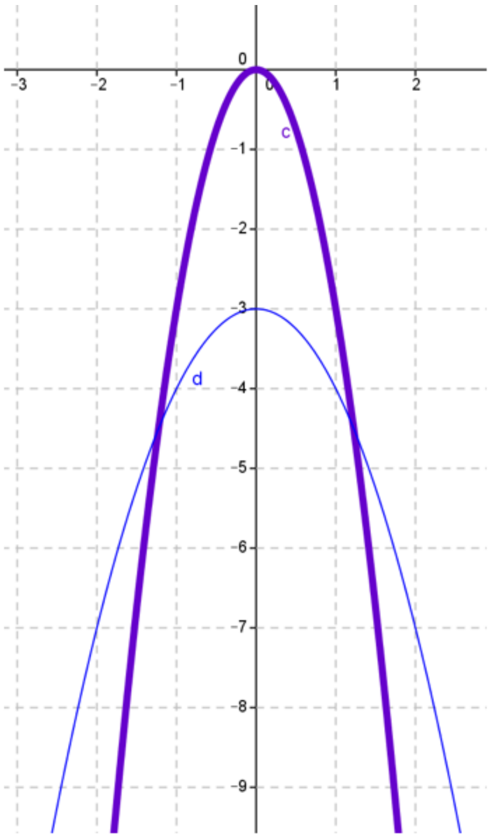
Ejercicio 13. *Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones. Para cada una indique las intersecciones con los ejes, la ecuación del eje de simetría y el rango:*

a) $y = \frac{1}{2}x^2$

b) $y = \frac{-1}{2}x^2$

Ejercicio 14. *Indique la ecuación de la parábola que se obtiene al reflejar respecto al eje X la de ecuación y= $2x^2 + 1$. ¿ Cuál es el rango de cada una de estas dos curvas?*

Ejercicio 15. *Determine la ecuación de cada una de las siguientes parábolas si se sabe que tienen la forma $y = ax^2 + c$:*



Ejercicio 16. *Indique cómo se puede obtener la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones a partir de la gráfica de $y = x^2$:*

a) $y = 3(x - 2)^2$ ***b)*** $y = -x^2 + 4$

Ejercicio 17. *Trace la gráfica de las siguientes ecuaciones. Para cada una indique las intersecciones con los ejes, la ecuación del eje de simetría y el rango:*

a) $y = 3(x + 2)^2$ ***b)*** $y = -(x - 1)^2 - 1$

Ejercicio 18. *Indique cómo se obtiene, a partir de la gráfica de la ecuación $y = x^2$, la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$. ¿Cuál es el rango, el vértice y el eje de simetría para esta curva?*

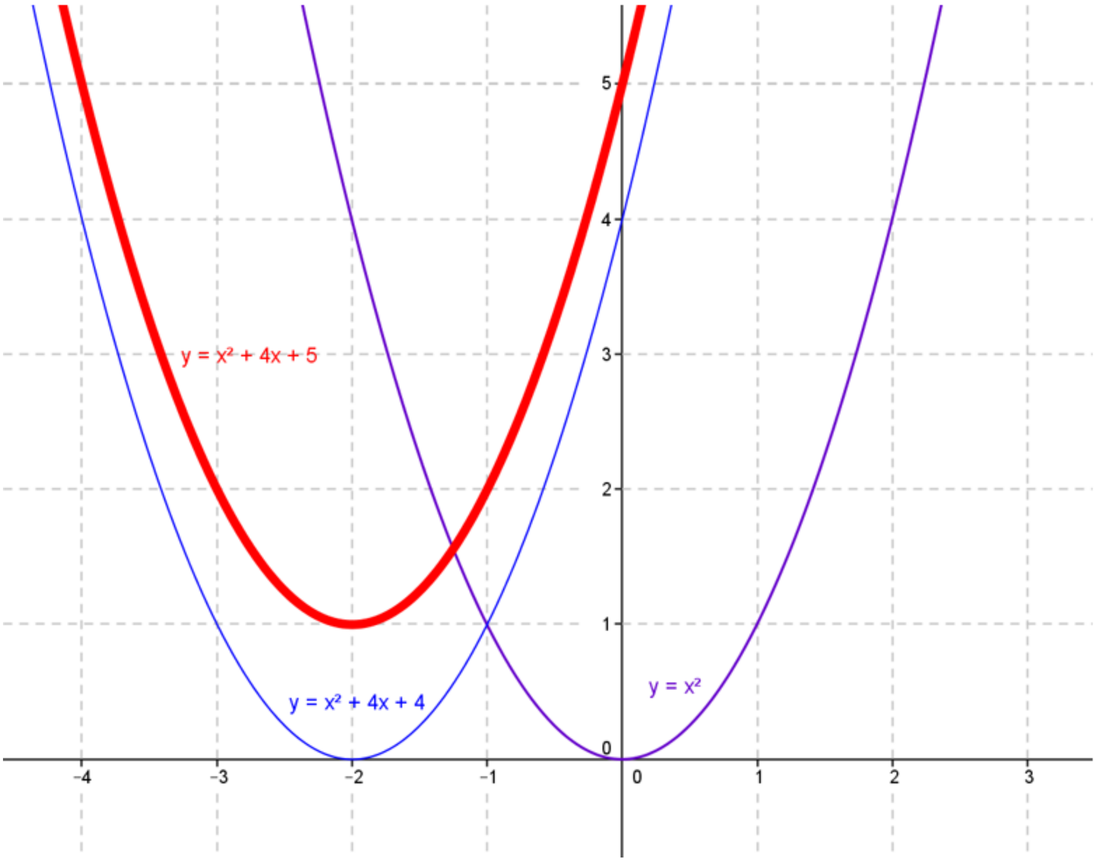
2.7. La gráfica de una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Si a, b, c son números reales con $a! = 0$, la gráfica de una ecuación de la forma y= $ax^2 + bx + c$ corresponde a una parábola, la cual se puede obtener a partir de la gráfica de $y = x^2$ haciendo algunas transformaciones como se puede observar en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 8. *Trace la parábola de ecuación y=* $4x^2 + 4x + 5$ *El procedimiento algebraico denominado completación de cuadrados es una herramienta muy útil para poder identificar las transformaciones que se deben aplicar a la parábola de ecuación $y = x^2$ para obtener la gráfica solicitada:*

$$
\begin{aligned}
&y = x^2 + 4x + 5 \\
&y = x^2 + 2x \cdot 2 \cdot +2^2 + 1 \\
&y = (x + 2)^2 + 1 \\
&y = (x - -2)^2 + 1
\end{aligned}
$$

A partir de esta última expresión se deduce que la parábola de ecuación $y = x^2$ se debe trasladar dos unidades hacia la izquierda y una unidad hacia arriba:

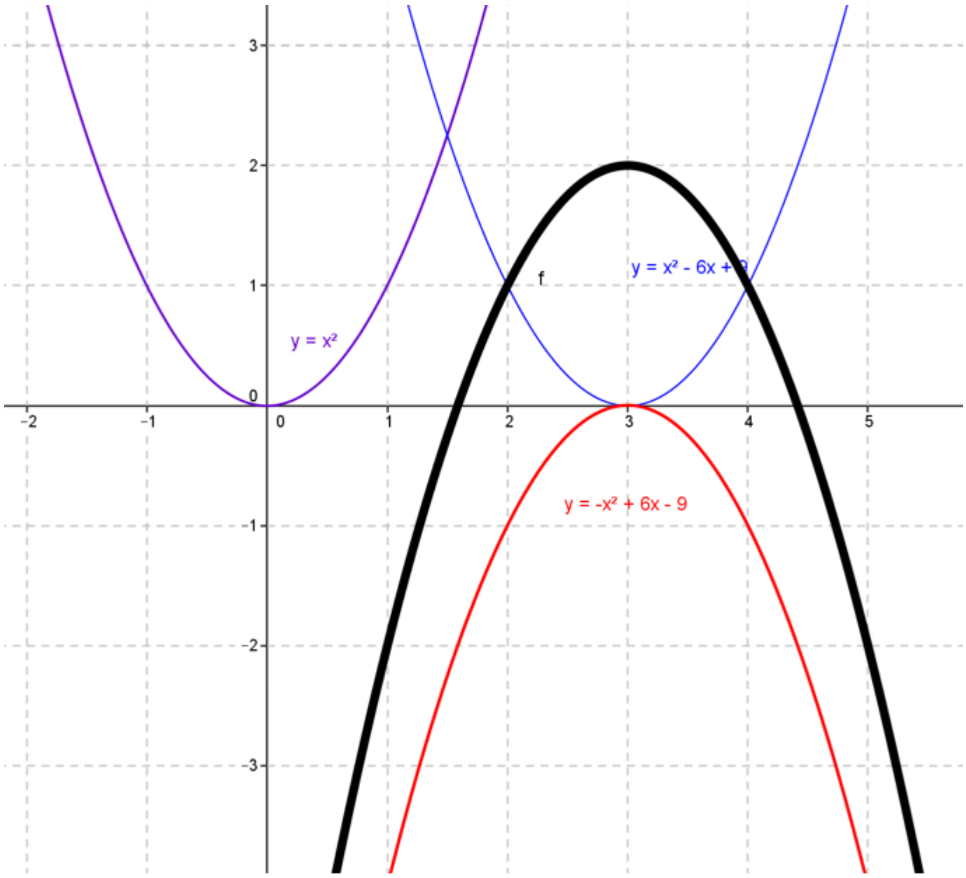


La gráfica resultante es una parábola cóncava hacia arriba, simétrica a la recta de ecuación $x = -2$, cuyo vértice es el punto de coordenadas $(-2, 1)$ y el rango es el conjunto $[1, +\infty$.

Ejemplo 9. *Trace la parábola de ecuación* $y = -x^2 + 6x - 7$ *Al completar cuadrados se obtiene la siguiente expresión:*

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 6x - 7 \\
y &= -(x^2 - 6x + 7) \\
y &= -(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 2) \\
y &= -(x - 3)^2 + 2
\end{aligned}
$$

De esta última expresión se deduce que la parábola de ecuación $y = x^2$ *se debe trasladar 3 unidades a la derecha* $(y = (x - 3)^2)$, *luego reflejarla respecto al eje* X $(y = -(x - 3)^2)$ *y por último trasladarla 2 unidades hacia arriba:*



La parábola resultante es cóncava hacia abajo que es simétrica a la recta de ecuación $x = 3$, su vértice es el punto de coordenadas $(3, 2)$ y el rango es el conjunto $]-\infty, 2]$.

Ejercicio 19. *Para cada una de las siguientes ecuaciones describa la secuencia de transformaciones que se deben aplicar a la parábola de ecuación $y = x^2$ para obtener la gráfica correspondiente y además indique: concavidad, vértice, eje de simetría, rango y cantidad de intersecciones con el eje X*

a. $y = -x^2 - 3$

b. $y = (x-3)^2 + 1$

c. $y = -(x+1)^2 - 2$

d. $y = x^2 + 10x + 25$

e. $y = -4 - x^2 + 4x$

f. $y = x^2 + 4x + 2$

g. $y = -x^2 + 2x$

Caso general:

Si se aplica el procedimiento de completación de cuadrados a la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ con $a! = 0$ de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
&y = ax^2 + bx + c\\
&y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})\\
&y = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right)\\
&y = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\\
&y = a\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + a\frac{c}{a} - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\
&y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{ab^2}{4a^2}\\
&y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\\
&y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a}\\
&y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \; con \; \Delta = b^2 - 4ac
\end{aligned}
$$

De esta última expresión se deduce que la gráfica básica (parábola de ecuación $y = x^2$) se debe trasladar horizontalmente $\frac{-b}{2a}$ (hacia la derecha si este número es positivo o hacia la izquierda si es negativo), luego comprimirla (si $|a| < 1$) o alargarla (si $|a| > 1$) por un factor $|a|$, reflejarla respecto al eje X si $a < 0$ y por último, trasladarla verticalmente $|\frac{-\Delta}{4a}|$ unidades (hacia arriba si $\frac{-\Delta}{4a}$ es negativo o hacia abajo si es positivo).
Por lo tanto, se tiene que la parábola resultante cumple con las siguientes características:

a. Cóncava hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$

b. Simétrica respecto a la recta de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$

c. El vértice es el punto de coordenadas $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

d. El rango es el conjunto $\left]\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$ cuando $a < 0$ o bien $\left[\frac{-\Delta}{4a}, \infty\right[$ si $a > 0$

e. Interseca al eje Y en el punto de coordenadas $(0, c)$

Por último, para determinar las intersecciones con el eje X basta resolver la ecuación $0 = ax^2 + bx + c$, la cual tiene soluciones reales únicamente cuando $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$. Por lo tanto, la parábola:

a. No interseca al eje X si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

b. Interseca una única vez al eje X si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

c. Interseca dos veces al eje X si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

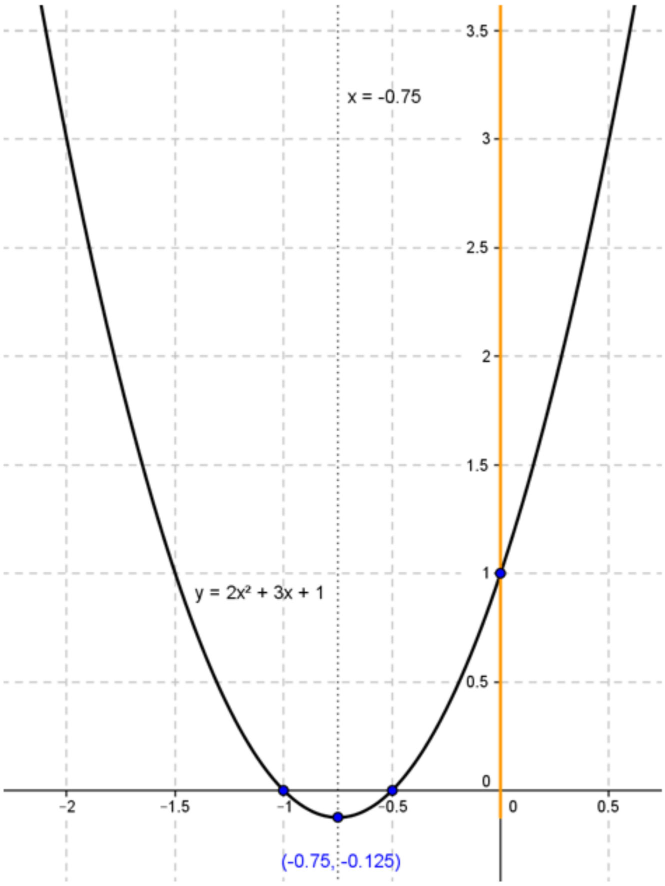
En este último caso, las intersecciones están dadas por $\left(\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, 0\right)$.

Ejemplo 10. *Realice un análisis completo de la parábola de ecuación* $y = 2x^2 + 3x + 1$.

Si se identifica la ecuación dada con la forma $y = ax^2 + bx + c$ se tiene que $a = 2$,$b = 3$,$c = 1$. Por lo tanto $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$, $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-1}{8}$, $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{4}$, $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1}{2}$ y $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1$. Por lo tanto, la parábola tiene con las siguientes propiedades:

- Cóncava hacia arriba
- Eje de simetría: recta de ecuación $x = -\dfrac{3}{4}$
- Vértice: punto de coordenadas$\left(\dfrac{-3}{4}, \dfrac{-1}{8}\right)$
- Intersección con el eje Y: punto de coordenadas $(0, 1)$
- Intersecciones con el eje X: puntos de coordenadas $(-1, 0)$y $\left(\dfrac{-1}{2}, 0\right)$
- Rango: conjunto $\left[\dfrac{-1}{8}, \infty\right[$

La gráfica de la ecuación es la siguiente:



Ejercicio 20. *Considere la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, de la cual se sabe que el eje de simetría contiene puntos en el primer cuadrante, c >0 y $a < 0$. Indique la cantidad de intersecciones con el eje X, el signo de b y el rango.*

Ejercicio 21. *Considere la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, la cual interseca al eje Y en el punto $(0, 4)$ y además el eje de simetría es la recta de ecuación $x = 2$. ¿Es posible que esta parábola interseque al eje X unaúnica vez?*

Ejercicio 22. *Para cada una de las siguientes ecuaciones realice el estudio completo (concavidad, eje de simetría, vértice, intersecciones con los ejes, rango) y grafique la parábola.*

a. $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$

b. $y = 3x - x^2$

c. $y = -x^2 + 4x + 5$

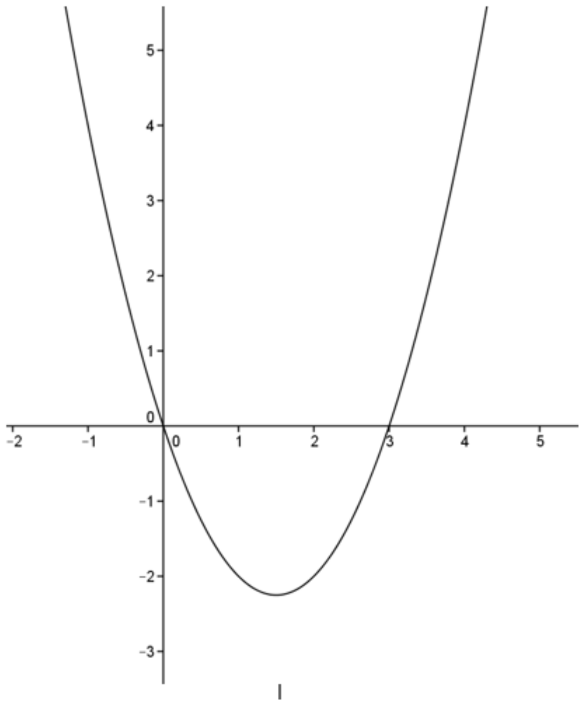
d. $y = x^2 + x + 2$

e. $y = -x^2 + \sqrt{2} - \frac{1}{2}x$

f. $y = -2x^2 - 3$

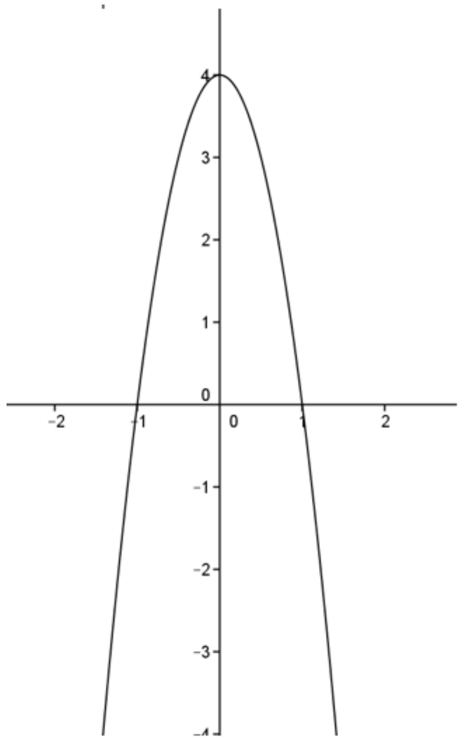
Ejercicio 23. *Para cada una de las siguientes parábolas de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, indique si cada uno de los coeficientes y el discriminante son números mayores, menores o iguales a cero:*

i.



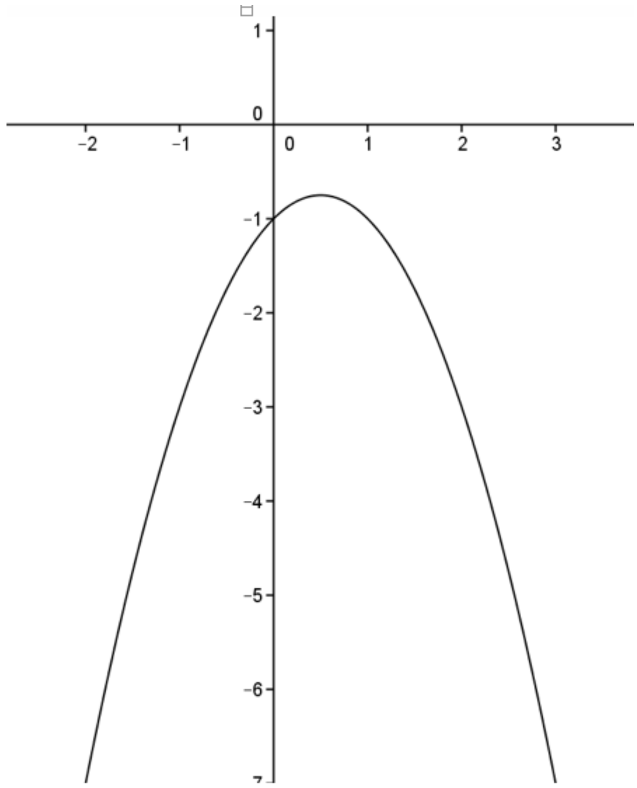
a		0
b		0
c		0
Δ		0

ii.



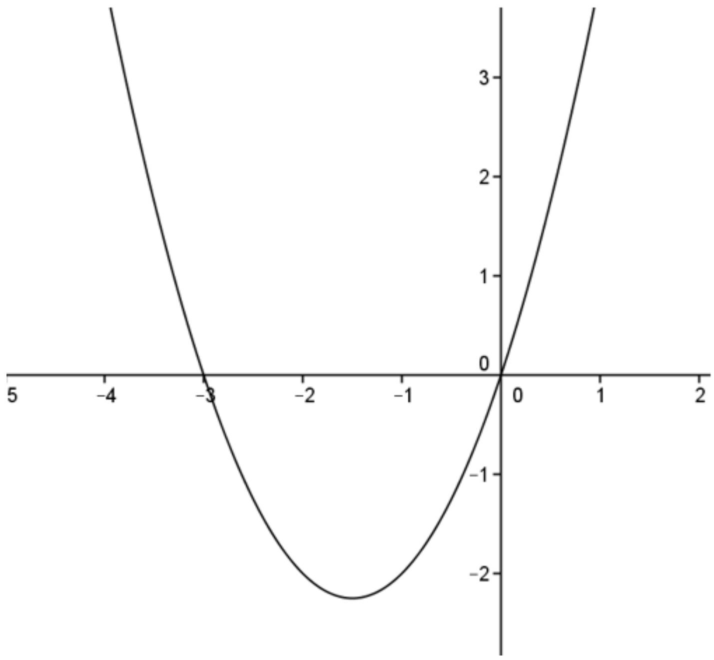
a		0
b		0
c		0
Δ		0

iii.

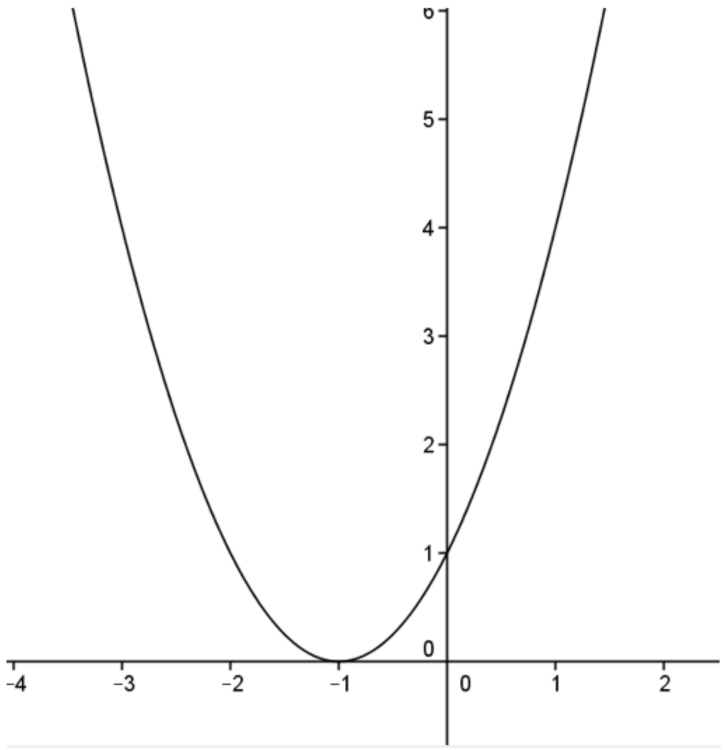


a		0
b		0
c		0
Δ		0

iv.



a		0
b		0
c		0
Δ		0

v. 

a		0
b		0
c		0
Δ		0

Ejercicio 24. *Si el eje de simetría de una parábola es la recta de ecuación $x = 2$ y contiene al punto de coordenadas $(4, -3)$ ¿cuál otro punto se puede asegurar con certeza que pertenece a esa parábola?*

Ejercicio 25. *Determine una ecuación para la parábola que cumple con la condición dada en cada caso:*

a. *El vértice es el punto de coordenadas $(-3, 2)$ e interseca al eje Y en el punto $(0, -2)$.*

b. *Contiene a los puntos de coordenadas $(1, 1)$ y $(-1, 3)$. El eje de simetría es la recta de ecuación $x = 2$.*

c. *Interseca a los ejes en los puntos $(0, 3), (-1, 0)$ y $(-4, 0)$.*

Ejercicio 26. *Considere un parábola con eje de simetría horizontal, cuyo vértice es el punto de coordenadas $(2, 3)$ y que interseca al eje Y en los puntos $(0, 2)$ y $(0, 4)$. Encuentre una ecuación para esta curva.*

3. Ecuación de la Circunferencia

A partir de la definición de una circunferencia y la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, es inmediato que si el centro es el punto de coordenadas C(a, b) y el radio es r entonces cualquier punto $P(x, y)$ de la circunferencia debe cumplir con la siguiente condición:

$$d(P, C) = r \leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Además, cualquier punto que cumpla con esa condición debe estar en la circunferencia. Por eso, a esta igualdad se le llama ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r. En particular, si el centro es el origen del sistema de coordenadas entonces la ecuación de la circunferencia está dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo 11. *Determine si el punto $R(2,2)$ se encuentra en el interior de la circunferencia de ecuación $(x-3)^2+(y+4)^2=25$.*

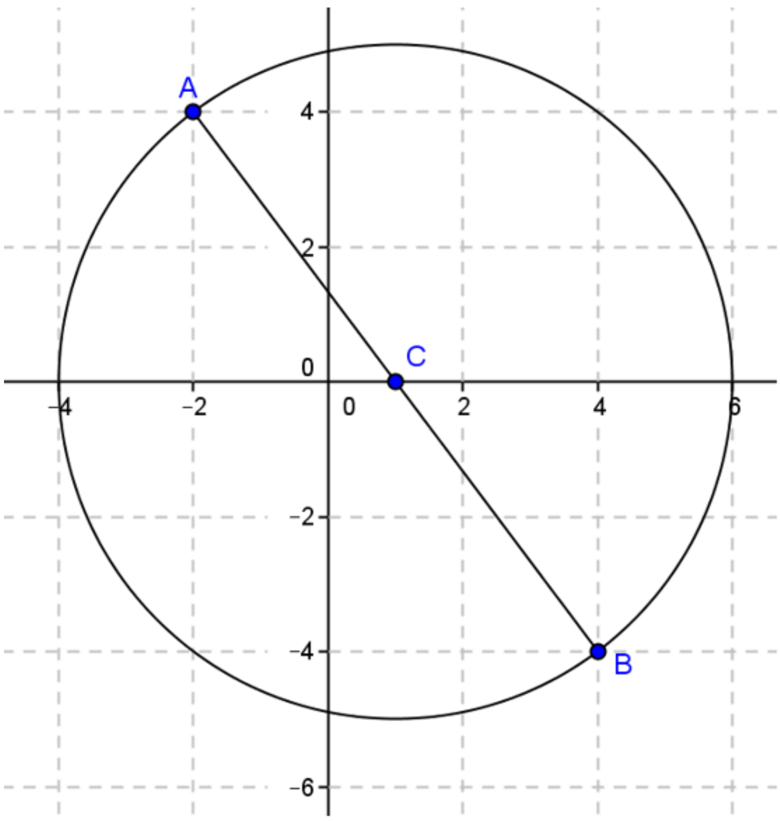
Solución

Note que el centro de la circunferencia es el punto de coordenadas $(3,-4)$ y el radio es de 5 unidades. Para determinar si el punto está en el interior o en el exterior de la circunferencia, basta con calcular la distancia de ese punto al centro: $d=\sqrt{(3-2)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{(1+36)}=\sqrt{37}>5$

Ejemplo 12. *Determine la ecuación de la circunferencia en la cual los puntos $A(-2,4)$ y $B(4,-4)$ son los extremos de un diámetro. Dibuje la curva y señale el diámetro $\overline{AB}$.*

Solución

El centro M del círculo debe ser el punto medio del diámetro $\overline{AB}$: $M\left(\dfrac{-2+4}{2},\dfrac{4+4}{2}\right)=(1,0)$. *El radio de la circunferencia es la distancia de A a M:* $r=\sqrt{(0-4)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{(16+9)}=5$ *La ecuación de la circunferencia es:* $(x-1)^2+y^2=25$



Ejemplo 13. *Calcule la longitud del diámetro de la circunferencia determinada por la ecuación $x^2+y^2+10y=34$.*

Solución

Al reescribir de la forma estándar la ecuación $x^2+y^2+10y=34$ se obtiene el radio. Para ello se completan cuadrados:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+10y &= 34 && \leftrightarrow \\ x^2+y^2+10y+25 &= 9 && \leftrightarrow \\ x^2+(y+5)^2 &= 3^2 && \leftrightarrow \\ (x-0)^2+(y--5)^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

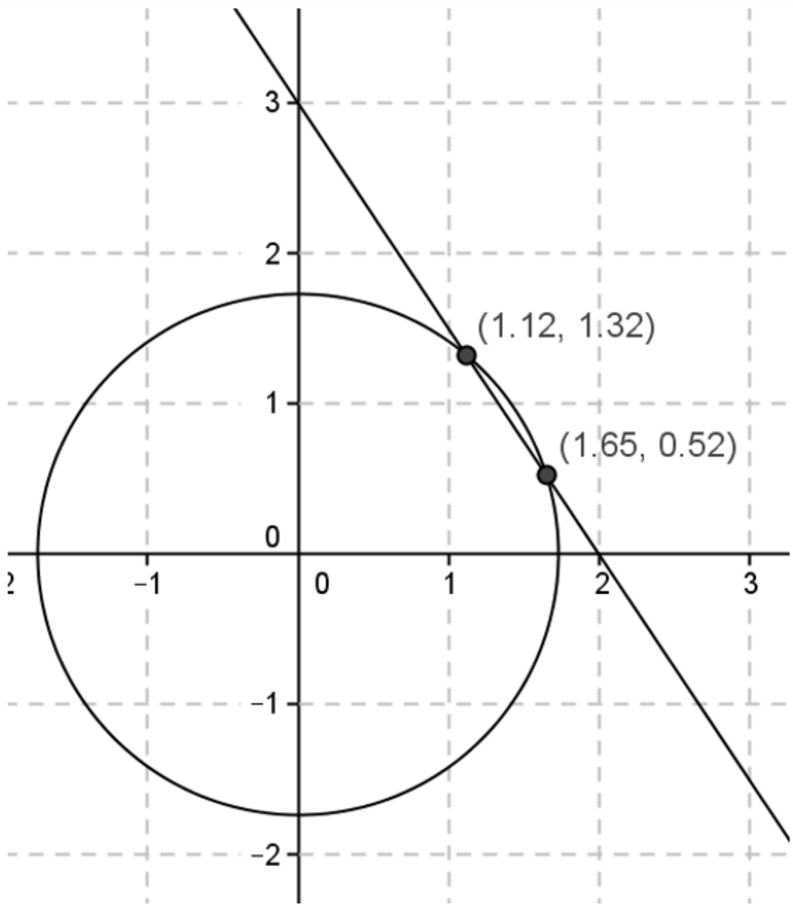
Se deduce que la ecuación tiene como centro el punto de coordenadas $(0,-5)$ *y un radio de 3 unidades. Por lo tanto, el diámetro mide 6 unidades.*

Ejemplo 14. *Determine algebraicamente si la recta de ecuación* $3x+2y=6$ *es tangente a la circunferencia de ecuación* $x^2+y^2=4$*. Trace ambas curvas en un mismo sistema de coordenadas y verifique su respuesta.*
Solución
Basta con determinar la cantidad de intersecciones que tienen las dos curvas y así poder clasificarlas en tangentes, secantes o si la recta está en el exterior del círculo. Para esto se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}2x+2y=6\\x^2+y^2=3\end{array}\right\}$$
$$\leftrightarrow$$
$$\left.\begin{array}{r}y=3-\frac{3}{2}x\\x^2+y^2=3\end{array}\right\}$$

Sustituyendo obtenemos:

$x^2+y^2=3 \leftrightarrow x^2+\left(3-\frac{3}{2}x\right)^2=3 \leftrightarrow x^2+9-9x+\frac{9}{4}x=3 \leftrightarrow 6-9x+\frac{13}{4}x^2=0$
La cantidad de soluciones de esta ecuación cuadrática corresponde al número de intersecciones entre la recta y la circunferencia. Para conocer este dato basta con calcular el discriminante: $\Delta=81-78=3>0$ *Se tiene entonces que las curvas se intersecan en dos puntos y por lo tanto no son tangentes. Para trazar las curvas basta con observar que la circunferencia tiene como centro al origen del sistema de coordenadas y tiene 2 unidades de radio. Para la recta se puede ver que cuando* $x=0\rightarrow y=3$ *y cuando* $y=0\rightarrow x=2$ *por lo que interseca a los ejes en los puntos* $(0,3)$ *y* $(2,0)$*.*



Si se desean conocer las abscisas de los puntos de intersección entre las dos curvas basta resolver la ecuación cuadrática: $6-9x+\frac{13}{4}x^2=0 \leftrightarrow 24-36x+13x^2=0 \leftrightarrow x=\dfrac{36\pm\sqrt{48}}{26}\dfrac{36\pm 4\sqrt{3}}{26}=\frac{18\pm 2\sqrt{3}}{13}$

Las ordenadas de los puntos se pueden encontrar utilizando la ecuación de la recta o la de la circunferencia. En este caso la más sencilla es $y=3-\frac{3}{2}x$

Si $x=\frac{18+2\sqrt{3}}{13}\approx 1,65$ *entonces* $y=3-\frac{3}{2}\cdot\frac{18+2\sqrt{3}}{13}=3-\frac{3}{1}\cdot\frac{9+\sqrt{3}}{13}=\frac{39-27-3\sqrt{3}}{13}=\frac{12-3\sqrt{3}}{13}\approx 0,52$

Si $x=\frac{18-2\sqrt{3}}{13}\approx 1,11$ *entonces* $y=3-\frac{3}{2}\cdot\frac{18-2\sqrt{3}}{13}=3-\frac{3}{1}\cdot\frac{9-\sqrt{3}}{13}=\frac{39-27+3\sqrt{3}}{13}=\frac{12+3\sqrt{3}}{13}\approx 1,32$

Las coordenadas de los puntos de intersección son $\left(\frac{18+2\sqrt{3}}{13},\frac{12-3\sqrt{3}}{13}\right)$ *y* $\left(\frac{18-2\sqrt{3}}{13},\frac{12+3\sqrt{3}}{13}\right)$.

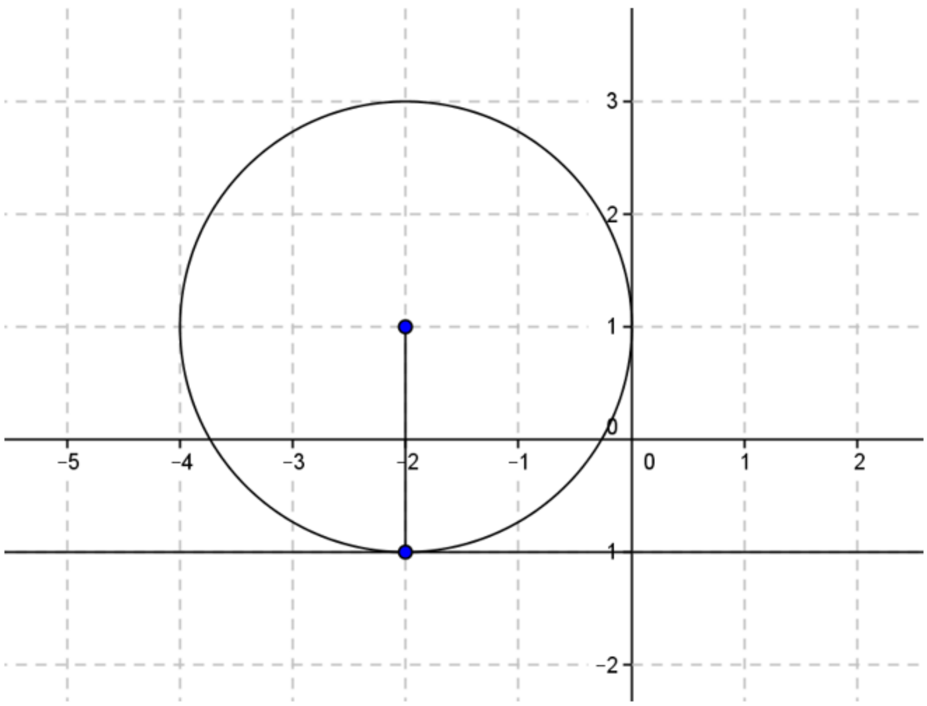
Ejemplo 15. *Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a la circunferencia de ecuación* $x^2+4x+y^2-2y=-1$ *en el punto de coordenadas* $P(-2,-1)$.

Solución

Al completar cuadrados se puede obtener la forma de la ecuación que permita deducir las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia:

$x^2+4x+y^2-2y=-1 \leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-2y+1=-1+4+1 \leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=2^2$

Se trata por lo tanto de la circunferencia de centro en $C(-2,1)$ *y de 2 unidades de radio. Como los puntos* $(-2,-1)$ *y* $(-2,1)$ *se encuentran en una misma recta vertical de ecuación* $x=-2$*, la distancia entre ellos es* $|-1-1|$*=2, por lo que se comprueba que* P *pertenece a la circunferencia y además la recta tangente por ese punto, como es perpendicular a la recta* $x=-2$*, debe ser horizontal y por lo tanto su ecuación es* $y=-1$.



Ejercicio 27. *Determine el centro y el radio de las circunferencias determinadas por las siguientes ecuaciones:*

a. $x^2+y^2+9=16$

b. $x^2+10x+y^2+2y=42$

c. $x^2 + 6x + y^2 = 10$

Ejercicio 28. *Determine si los siguientes pares de ecuaciones determinan dos circunferencias tangentes, secantes, mutuamente exteriores o una interior a la otra.*

a. $x^2 + y^2 = 25, \quad (x-4)^2 + y^2 = 1$

b. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1, \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

Ejercicio 29. *Determine si los siguientes pares de ecuaciones determinan una recta y una circunferencia tangentes, secantes o que no se intersecan.*

a. $x^2 + (y+2)^2 = 1, \quad y = x + 2$

b. $x^2 + 4x + y^2 = 5, \quad 4 = 2x + y$

Ejercicio 30. *Considere la circunferencia de ecuación $x^2 - 4y + y^2 = 1$ y el punto $Q(2,1)$. Determine la ecuación de la recta que contiene al radio de extremo Q y la recta tangente a la circunferencia por el punto Q.*

Ejercicio 31. *Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$. Determine una ecuación para una circunferencia que sea tangente interior, otra tangente exterior, otra secante, otra que esté en el interior y otra en el exterior de la circunferencia dada.*

Referencias

[1] Allen y colegas (1993), *Matemática para la escuela secundaria*. Geometría (Parte I).

[2] Allen y colegas (1993), *Matemática para la escuela secundaria*. Geometría (Parte II).

[3] Moise, E. Y Downs, F. (1986), *Geometría Moderna*. EEUU. Adison-Wesley Iberoamericana.

[4] Moise, E. (1962), *Elementary Geometry from an advanced satndpoint*. EEUU. Adison-Wesley.

[5] Sancho, L. Y Blanco, R (2010), *Matemática para la Enseñanza Media*. Serie Cabecar. SIEDIN, UCR.

[6] Stewart, J. Redlin, L. Y Watson, S (2006), *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo.* Quinta Edición.

[7] Swokowski, E (1986), *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamericana.