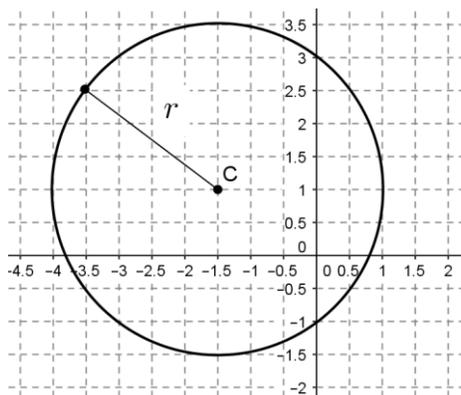




# Circunferencias

Prof. José M. Acosta Baltodano

**Circunferencia:** Conjunto de puntos coplanares que son equidistantes de un punto fijo llamado **centro** de la circunferencia.



## Elementos de la circunferencia

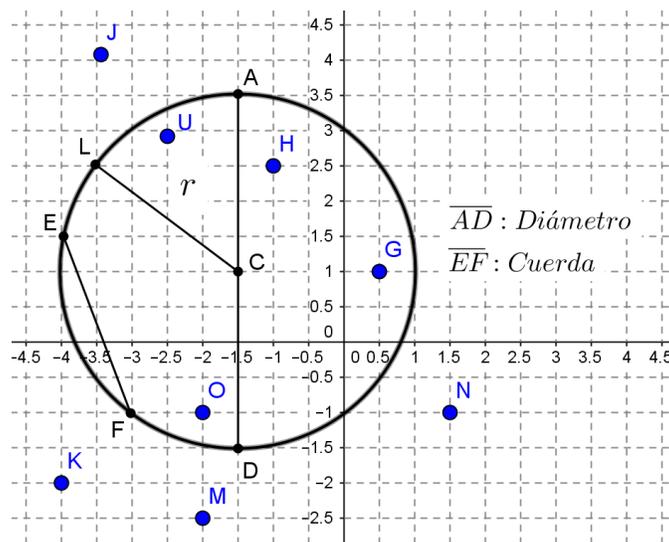
**Radio:** Segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de la misma.

**Cuerda:** Segmento cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia.

**Diámetro:** Cuerda que contiene al centro de la circunferencia.

**Interior de la circunferencia:** Conjunto de puntos coplanares a la circunferencia, que están a una distancia del centro menor que el radio.

**Exterior de la circunferencia:** Conjunto de puntos coplanares a la circunferencia, que están a una distancia del centro mayor que el radio.



## Circunferencias y rectas

### **Recta secante a una circunferencia:**

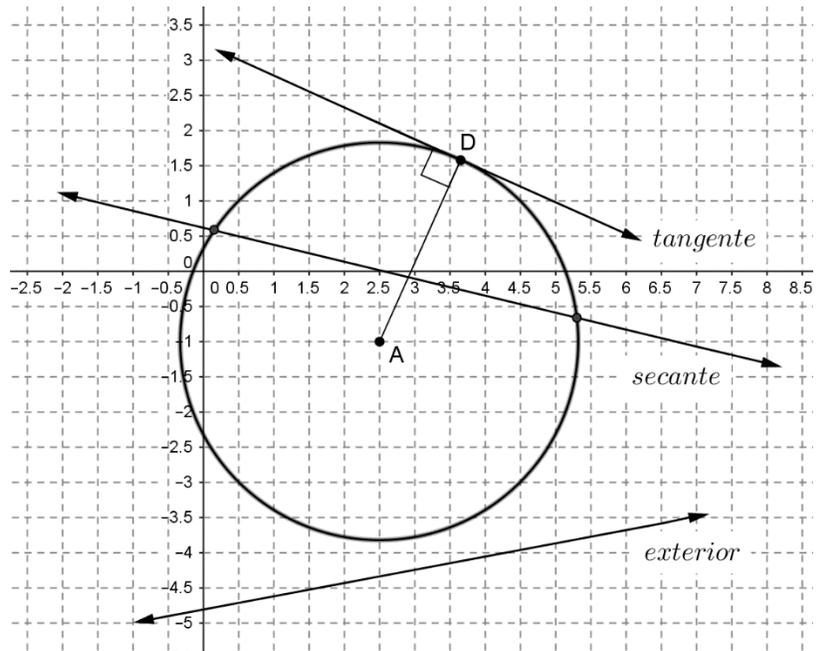
Recta que contiene a dos puntos de la circunferencia.

### **Recta tangente a una circunferencia:**

Recta que pertenece al mismo plano de la circunferencia y contiene exactamente un punto de la circunferencia.

Se dice que la recta y la circunferencia son tangentes. Al punto de intersección de la recta y la circunferencia se le llama punto de tangencia.

**Recta exterior a la circunferencia:** Recta que pertenece al mismo plano de la circunferencia pero no la interseca.

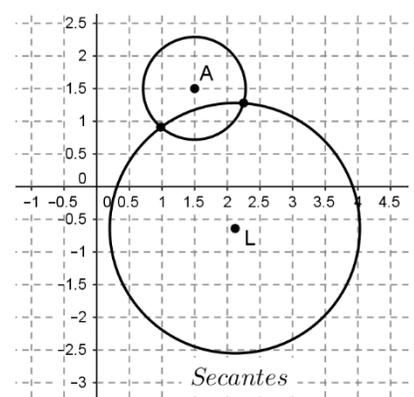
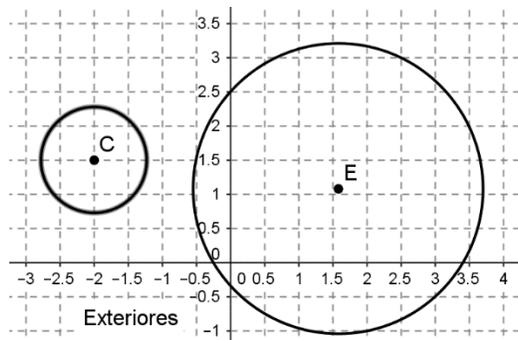
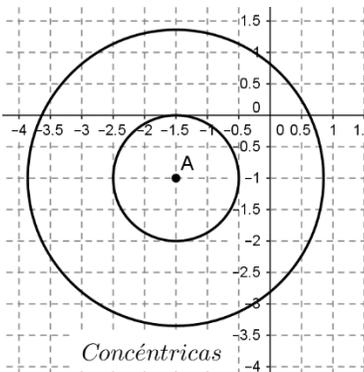


## Posiciones relativas entre dos circunferencias coplanares

**Circunferencias concéntricas:** Dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro.

**Circunferencias exteriores:** Dos circunferencias tales que cada una está completamente contenida en el exterior de la otra se denominan exteriores.

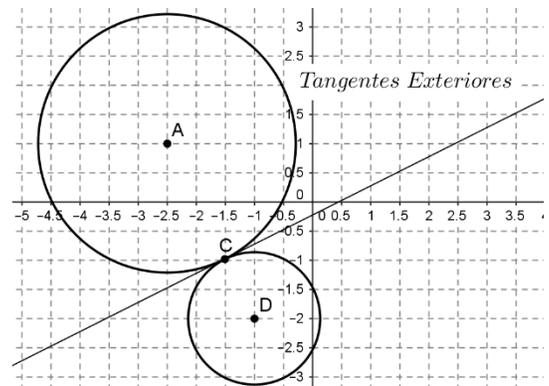
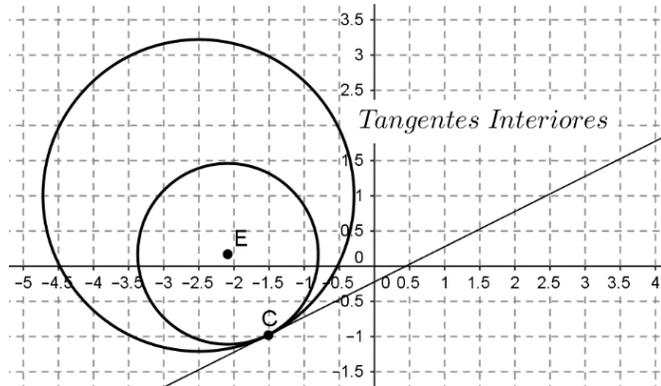
**Circunferencias secantes:** Dos circunferencias son secantes si se intersecan en exactamente dos puntos.



**Circunferencias tangentes:** Dos circunferencias son tangentes si se intersecan en exactamente un punto.

Interiores: si una circunferencia está contenida en el interior de la otra (excepto por el punto de tangencia).

Exteriores: si una circunferencia está contenida en el exterior de la otra (excepto por el punto de tangencia).



**Problemas**

1. En cada caso, dibuje la circunferencia de centro y radio dado (use compás).

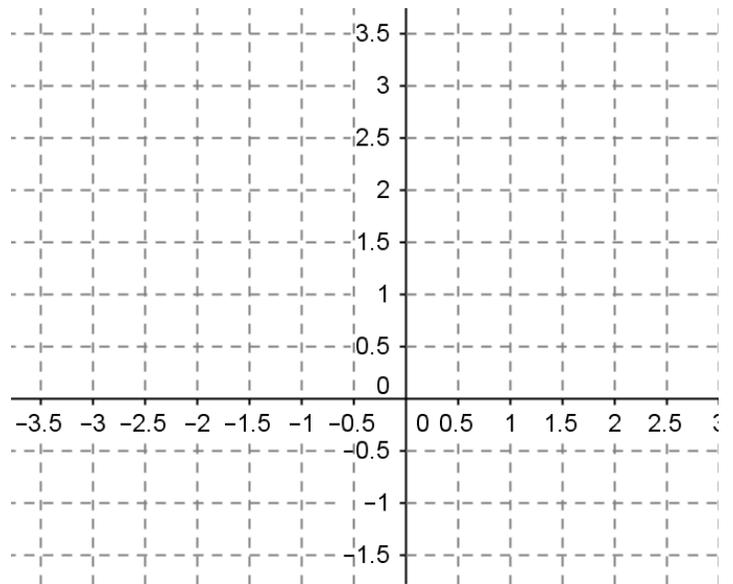
Centro: $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	Radio: 2	Centro: $\left(2, -\frac{5}{2}\right)$	Radio: $\frac{3}{2}$
<p>Grilla de coordenadas para el primer problema. El eje horizontal (x) va de -3.5 a 2 con marcas cada 0.5. El eje vertical (y) va de -2 a 3 con marcas cada 0.5.</p>	<p>Grilla de coordenadas para el segundo problema. El eje horizontal (x) va de -1 a 4 con marcas cada 0.5. El eje vertical (y) va de -4.5 a 1 con marcas cada 0.5.</p>		

2. Dibuje en el mismo plano cartesiano las siguientes circunferencias, luego clasifíquelas de acuerdo a su posición:

a) Centro:  $\left(\frac{-5}{2}, 1\right)$  , radio: 1

b) Centro:  $(0,1)$  , radio:  $\frac{3}{2}$

Clasificación: \_\_\_\_\_

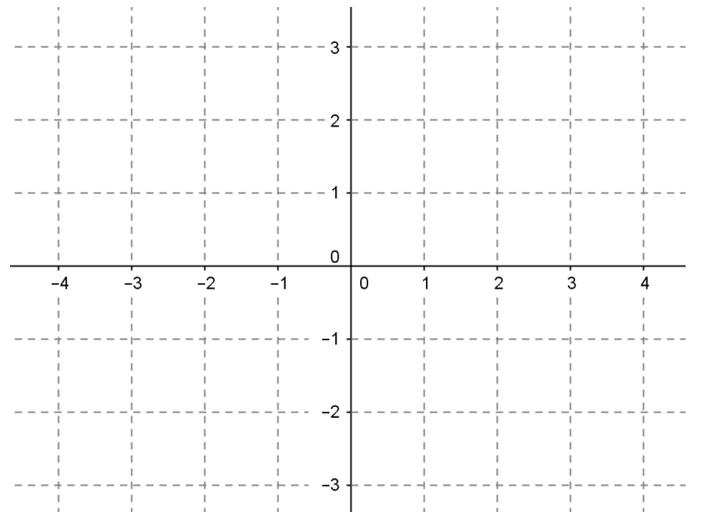


3. Dibuje en el mismo plano cartesiano las siguientes circunferencias, luego clasifíquelas de acuerdo a su posición:

a) Centro:  $(0,0)$  , radio: 2

b) Centro:  $(0,1)$  , radio: 1

Clasificación: \_\_\_\_\_

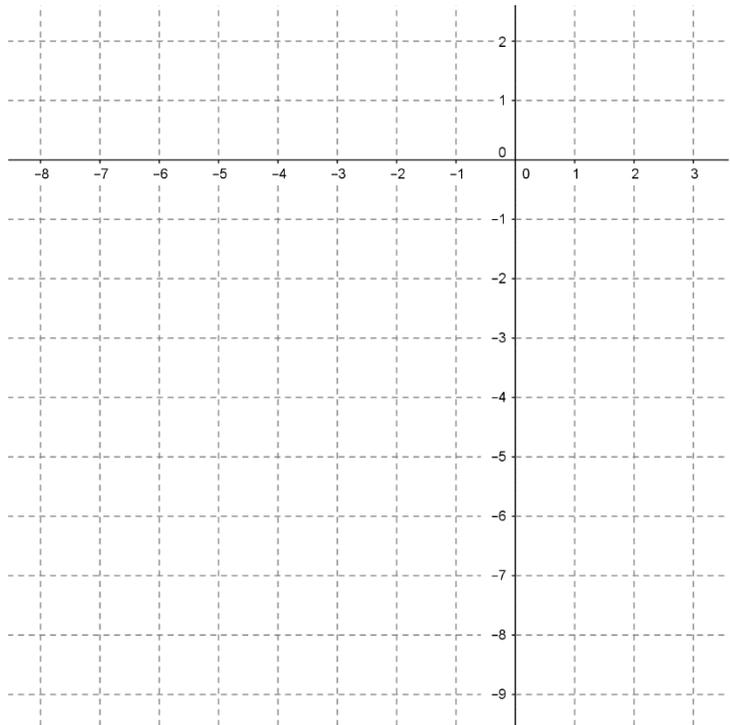


4. Dibuje en el mismo plano cartesiano las siguientes circunferencias, luego clasifíquelas de acuerdo a su posición:

a) Centro:  $(-3, -4)$ , radio: 5

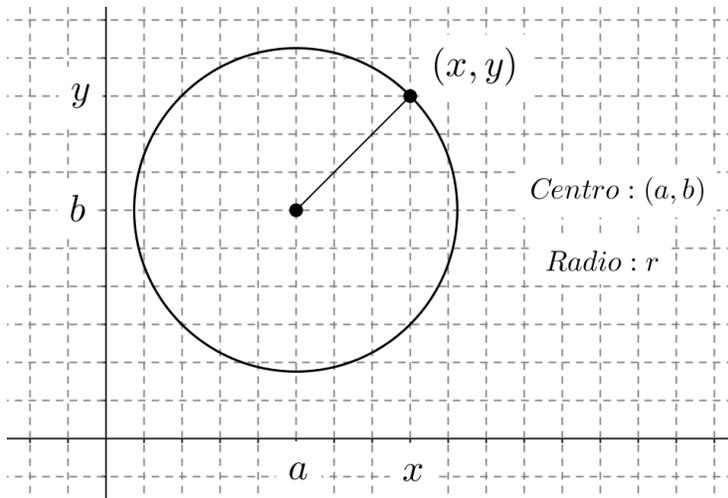
b) Centro:  $(-3, -4)$ , radio: 2

Clasificación: \_\_\_\_\_



### Ecuación de una circunferencia

La ecuación de una circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $r$ , es:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

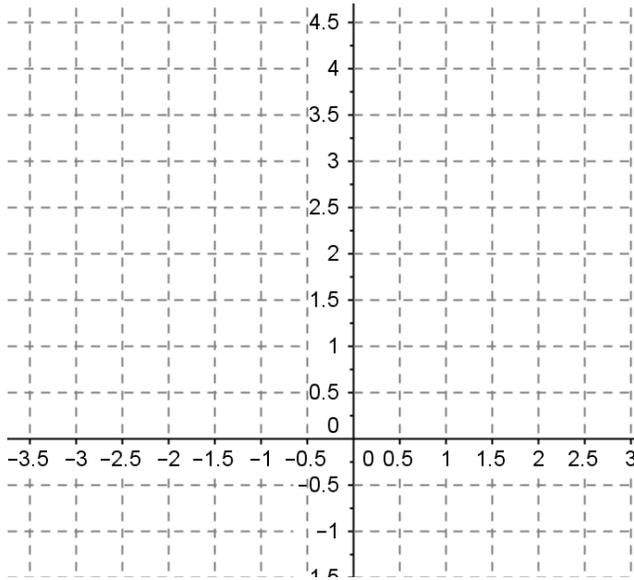


### Explicación

**Ejercicios:**

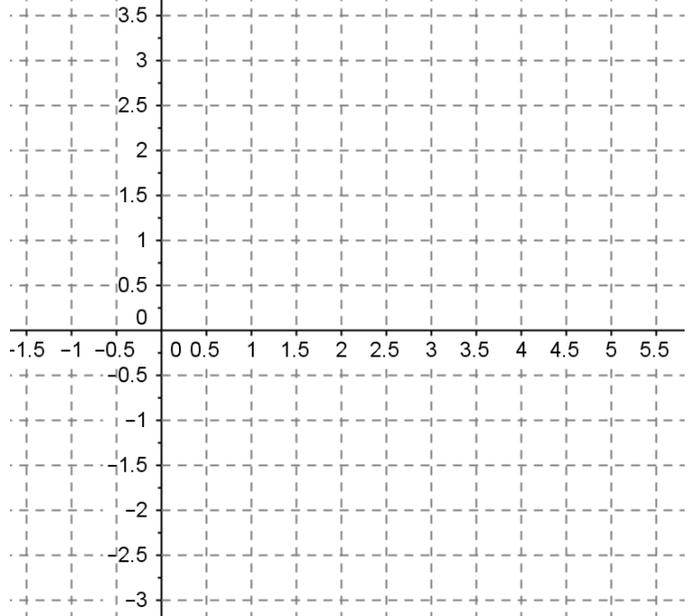
1. Determine el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias. Dibuje (usando “compás”) en el plano cartesiano.

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$$



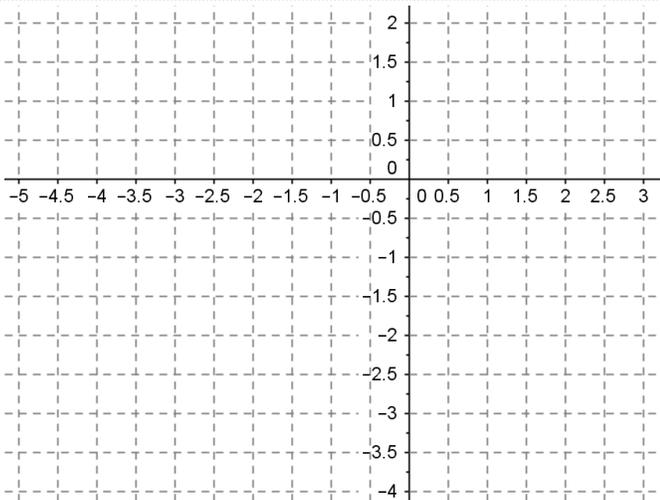
**Centro:** \_\_\_\_\_ **Radio:** \_\_\_\_\_

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$



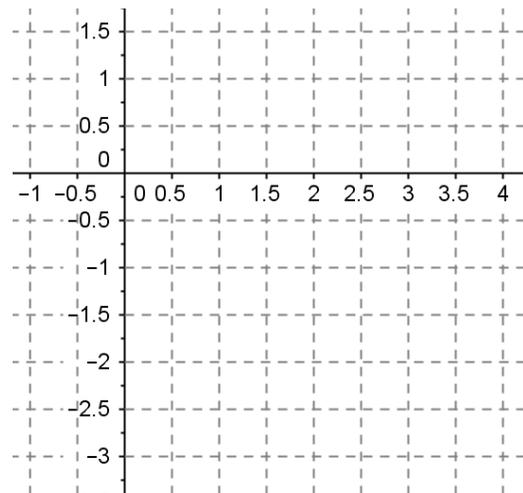
**Centro:** \_\_\_\_\_ **Radio:** \_\_\_\_\_

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{4}$$



**Centro:** \_\_\_\_\_ **Radio:** \_\_\_\_\_

$$(x-1,5)^2 + (y+1)^2 = 2,25$$



**Centro:** \_\_\_\_\_ **Radio:** \_\_\_\_\_

2. Escriba la ecuación de cada una de las siguientes circunferencias

a) Centro:  $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ , radio: 1

Ecuación: \_\_\_\_\_

b) Centro:  $(0,1)$ , radio:  $\frac{3}{2}$

Ecuación: \_\_\_\_\_

c) Centro:  $(-5,0)$ , radio: 7

Ecuación: \_\_\_\_\_

d) Centro:  $(-2,-5)$ , radio: 5

Ecuación: \_\_\_\_\_

e) Centro:  $(0,8)$ , radio:  $\sqrt{3}$

Ecuación: \_\_\_\_\_

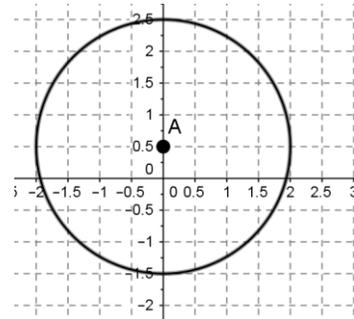
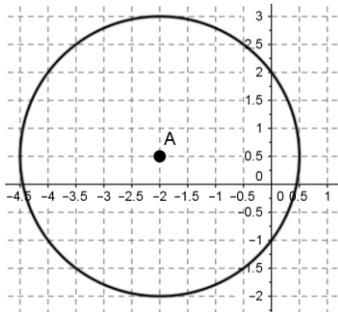
f) Centro:  $\left(\frac{-7}{3}, \pi\right)$ , radio: 12

Ecuación: \_\_\_\_\_

3. Escriba la ecuación de cada una de las siguientes circunferencias (centro A).

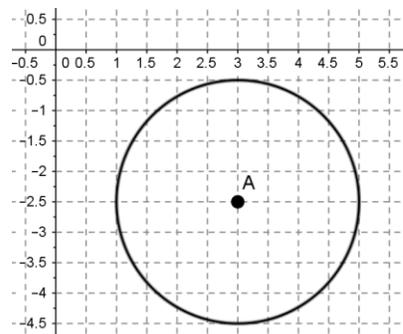
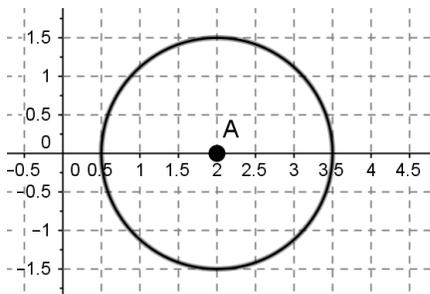
Ecuación: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_



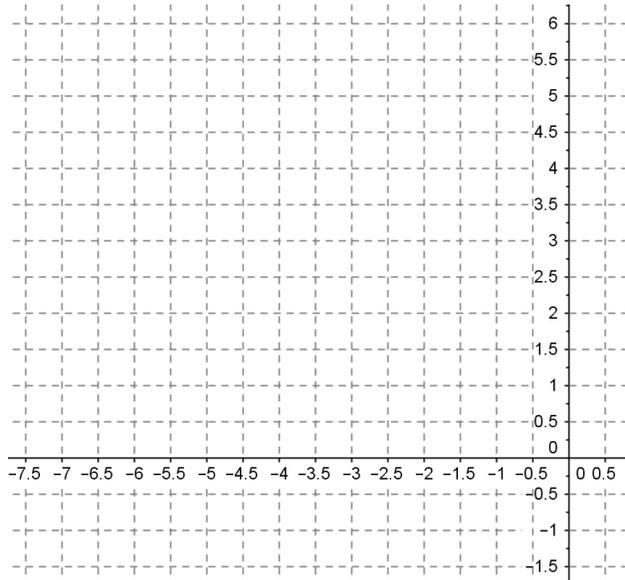
Ecuación: \_\_\_\_\_

Ecuación: \_\_\_\_\_

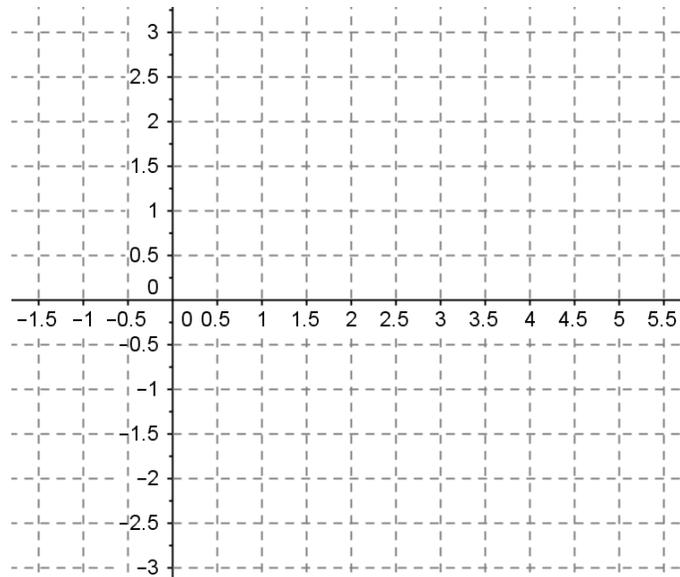


En ocasiones es necesario “completar cuadrados” para determinar el centro y el radio.

4. Determine el centro y el radio de la circunferencia  $x^2 + y^2 + 8x - 4y = -10$ . Dibuje en el plano cartesiano.



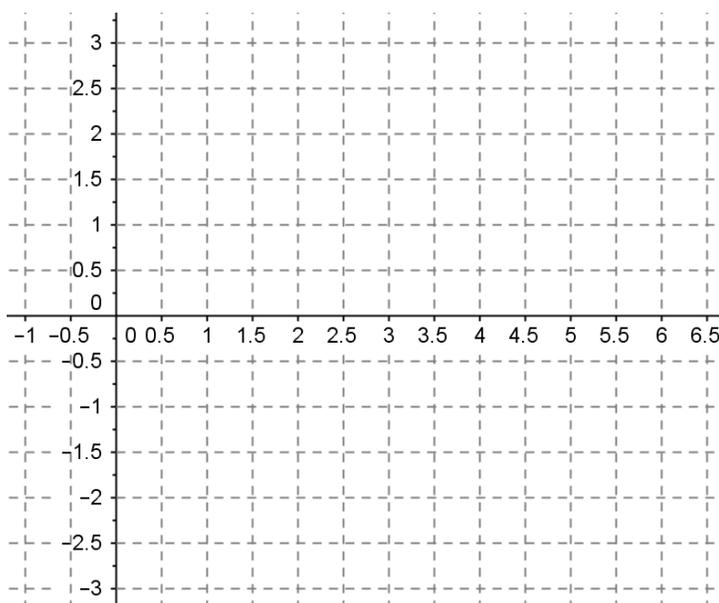
5. Determine el centro y el radio de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ . Dibuje en el plano cartesiano.



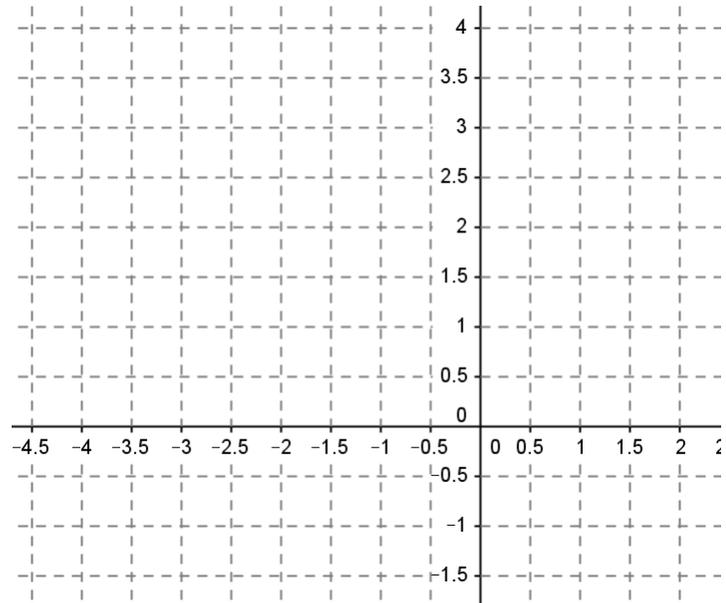
6. Determine la ecuación de la circunferencia en la cual los puntos  $(-3,4)$  y  $(-2,1)$  son los extremos de un diámetro.

7. Determine si el punto  $(-3,-1)$  se encuentra en el interior, exterior o en la circunferencia  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$ .

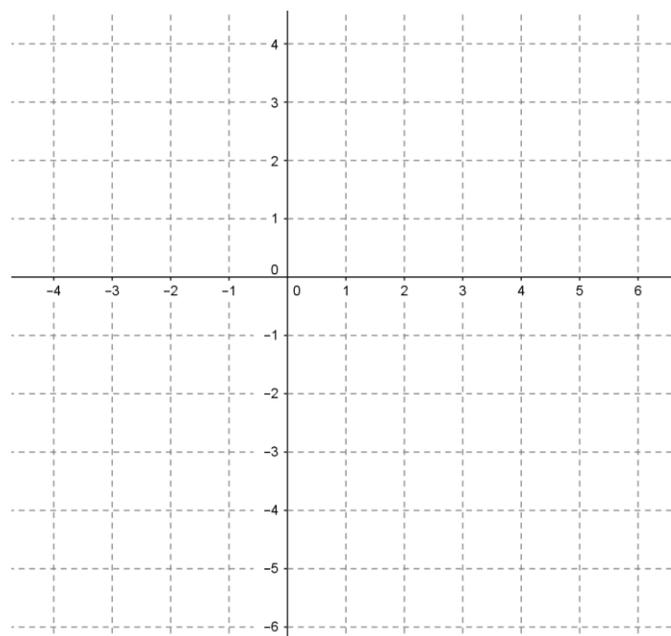
8. Calcule la longitud del diámetro de la circunferencia determinada por la ecuación  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = -1$ .



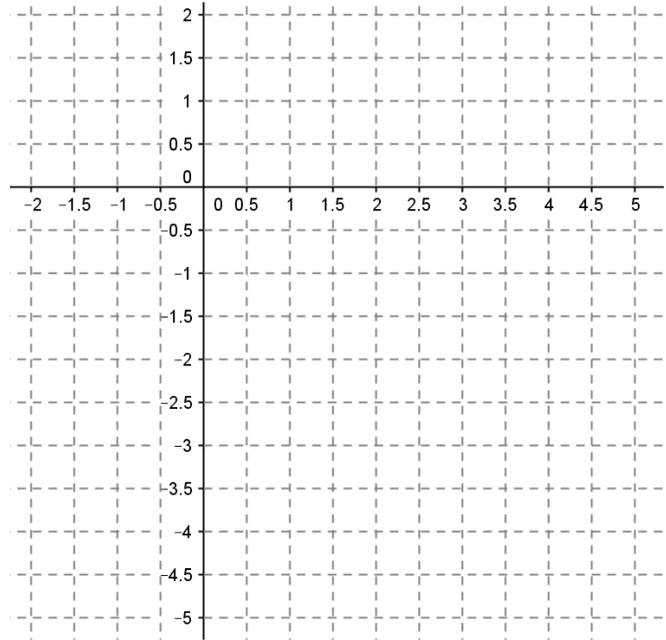
9. Determine algebraicamente si la recta de ecuación  $x + y = 1$  es tangente, secante o exterior a la circunferencia de ecuación  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ . Posteriormente, trace ambas curvas en un mismo sistema de coordenadas y verifique su respuesta.



10. Determine algebraicamente si la recta de ecuación  $y + 4 = -2x$  es tangente, secante o exterior a la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 - 4x = 5$ . Posteriormente, trace ambas curvas en un mismo sistema de coordenadas y verifique su respuesta.



11. Determine algebraicamente si las circunferencias cuyas ecuaciones son  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  y  $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$  determinan dos circunferencias tangentes, secantes, mutuamente exteriores o una interior a la otra. Posteriormente, trace ambas curvas en un mismo sistema de coordenadas y verifique su respuesta.



### Ejercicios varios

1. Determinar las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

- a. Centro  $(0,0)$  y radio 3 \_\_\_\_\_
- b. Centro  $(2,-3)$  y radio 5 \_\_\_\_\_
- c. Centro  $\left(3, \frac{-1}{2}\right)$  y radio 3 \_\_\_\_\_
- d. Centro  $\left(\frac{-1}{2}, 4\right)$  y radio  $\frac{3}{2}$  \_\_\_\_\_
- e. Centro  $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}\right)$  y radio  $\frac{2}{3}$  \_\_\_\_\_
- f. Centro  $\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}\right)$  y radio 3 \_\_\_\_\_
- g. Centro  $(3,-1)$  y tangente al eje  $Y$  \_\_\_\_\_

2. Determinar el centro y el radio de las siguientes circunferencias

Circunferencia	Centro	Radio
$x^2 + y^2 = 4$		
$x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$		
$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$		
$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$		
$(x+3)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$		
$x^2 + (y-1)^2 = 2$		
$x^2 + y^2 + 2y = 3$		
$x^2 + y^2 + 6x - 2y = -6$		
$x^2 + y^2 - 4x = 0$		
$x^2 + y^2 - 2x - 2y = -1$		
$x^2 + y^2 - 4x - 2y = -1$		
$x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$		
$2x^2 + 2y^2 + 8x - 6y + 7 = 0$		
$9x^2 + 9y^2 - 36x - 54y + 113 = 0$		
$4x^2 + 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$		

- Determine la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro el segmento que une los puntos  $A(3, -2)$  y  $B(5, 4)$
- Determine la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes en  $(-4, 0)$  y  $(0, 4)$ .
- Determine los puntos de intersección de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 18$  y la recta  $2x - y + 9 = 0$ .

6. Determine las ecuaciones de las circunferencias que cumplen las condiciones que se indican.
- Radio 5 y concéntrica con  $x^2 + y^2 - 4x - 2 = 0$
  - Centro  $(3, -1)$  y tangente al  $Y$
  - Un diámetro es el segmento que une los puntos  $(2, -3)$  y  $(-4, 5)$
  - El centro es el punto de intersección de las rectas  $2x + 5y - 2 = 0$ ,  $x - 2y + 8 = 0$  y pasa por el punto  $(2, -1)$
  - Pasa por el origen y por los puntos  $(-2, 0)$  y  $(3, 3)$
7. Dada la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 - 6x + 4y = -4$  indique si cada uno de los siguientes puntos está en el interior, en el exterior o en la circunferencia.
- $(1, -2)$
  - $(3, -3)$
  - $(3, -5)$
  - $(6, -2)$
  - $(1, -5)$
  - $(3, -2)$
8. Dada la circunferencia de ecuación  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$  indique si cada una de las siguientes rectas es secante, tangente o exterior a la circunferencia.
- $x = -2$
  - $x = 1$
  - $x = -1$
  - $y = x + 1$
  - $y = -x + 1$
  - $y = 1 - \sqrt{2}$

### Referencias

- Allen y colegas (1963). *Matemática para la escuela secundaria. Geometría (parte 1)*.
- Allen y colegas (1963). *Matemática para la escuela secundaria. Geometría (parte 2)*.
- Moise, E. y Downs, F. (1986) *Geometría Moderna*. USA: Adison-Wesley Iberoamericana
- Moise, E. (1962). *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. Adison-Wesley.
- Sancho, Lizeth y Blanco, Randall (2010). *Matemática para la enseñanza media*. Serie Cabécar. SIEDIN, UCR.
- Stewart James, Redlin Lothar y Watson Saleem (2006). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Quinta edición. 2006
- Swokowski, Earl (1986). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Segunda edición. Grupo editorial Iberoamérica.