UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECTO MATEM

CUARTO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

02 DE OCTUBRE 2019

SOLUCIÓN

1. $\boxed{\text{33 puntos}}$ Resuelva las siguientes integrales:

a) $\boxed{\text{9 puntos}}$ $\displaystyle\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx$

Solución

Considere

$$\begin{array}{c|c} u = \operatorname{sen}(2x) & dv = e^{3x}dx \\ \hline du = 2\cos(2x)dx & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \quad \boxed{\textbf{1 punto}}$$

Por tanto:

$$\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx = \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \int \frac{e^{3x}}{3}\cdot 2\cos(2x)dx$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{3}\int e^{3x}\cos(2x)dx \quad \boxed{\textbf{1 punto}}$$

Ahora $I_1 = \dfrac{2}{3}\displaystyle\int e^{3x}\cos(2x)dx$ y considere:

$$\begin{array}{c|c} z = \cos(2x) & dy = e^{3x}dx \\ \hline dz = -2\operatorname{sen}(2x)dx & y = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \quad \boxed{\textbf{1 punto}}$$

Por tanto: $I_1 = \dfrac{2}{3}\left[\dfrac{e^{3x}}{3}\cos(2x) - \displaystyle\int \dfrac{e^{3x}}{3}\cdot -2\operatorname{sen}(2x)dx\right]$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) + \frac{2}{3}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx\right] \quad \boxed{\textbf{1 punto}}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - I_1 \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2}{3}\left[\frac{e^{3x}}{3}\cos(2x) + \frac{2}{3}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx\right] && \boxed{\textbf{1 punto}} \\ &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2e^{3x}}{9}\cos(2x) - \frac{4}{9}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx && \boxed{\textbf{1 punto}} \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx + \frac{4}{9}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2e^{3x}}{9}\cos(2x) && \boxed{\textbf{1 punto}} \\ \frac{13}{9}\int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx &= \frac{e^{3x}}{3}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2e^{3x}}{9}\cos(2x) && \boxed{\textbf{1 punto}} \\ \int e^{3x}\operatorname{sen}(2x)dx &= \frac{3e^{3x}}{13}\operatorname{sen}(2x) - \frac{2e^{3x}}{13}\cos(2x) + C && \boxed{\textbf{1 punto}} \end{aligned}$$

$b)$ $\boxed{7 \text{ puntos}}$ $\int \tan^5(x)dx$

Solución

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)dx &= \int \tan(x)\tan^2(x)dx && \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= \int \tan(x)(\sec^2(x)-1)dx && \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= \underbrace{\int \tan(x)\sec^2(x)dx}_{A} - \underbrace{\int \tan(x)dx}_{B} && \boxed{\textbf{1 punto}}
\end{aligned}$$

Para A considere $u = \tan(x) \rightarrow \ du = \sec^2(x)dx$

$\int \tan(x)\sec^2(x)dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + C_1 = \frac{\tan^2(x)}{2} + C_1$ $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

Para B considere que $\tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ y tome $u = \cos(x) \rightarrow du = -\operatorname{sen}(x)dx$

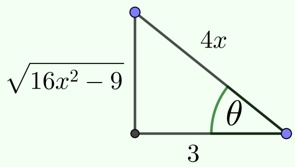
$\int \tan(x)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \int \frac{-du}{u} = \ln|u| + C_2 = -\ln|\cos(x)| + C_2$

Por tanto $\int \tan^3(x) = \frac{\tan^2(x)}{2} + -\ln|\cos(x)| + C$ $\boxed{\textbf{2 puntos}}$

$c)$ $\boxed{8 \text{ puntos}}$ $\int_1^3 \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2-9}}$

Solución

Considere $4x = 3\sec\theta \rightarrow \sec(x) = \frac{4x}{3}$ con $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.
Por tanto: $x = \frac{3\sec\theta}{4} \rightarrow dx = \frac{3\sec\theta\tan\theta d\theta}{4}$ $\boxed{\textbf{2 puntos}}$



$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2-9}}\\
&= \int \frac{\frac{3}{4}\sec\theta\tan\theta}{\frac{9}{16}\sec^2\theta\sqrt{16\left(\frac{9}{16}\sec^2\theta\right)-9}}d\theta && \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= \frac{4}{3}\int \frac{\tan\theta}{\sec\theta\cdot 3\sqrt{\sec^2\theta-1}}d\theta && \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= \frac{4}{9}\int \frac{\cancel{\tan\theta}}{\sec\theta\cdot\cancel{\tan\theta}}d\theta && \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= \frac{4}{9}\int \frac{1}{\sec\theta}d\theta && \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= \frac{4}{9}\int \cos\theta d\theta = \frac{4}{9}\operatorname{sen}\theta + C = \frac{4}{9}\frac{\sqrt{16-x^2}}{4x} && \boxed{\textbf{1 punto}}\\
&= \frac{\sqrt{16-x^2}}{9x}
\end{aligned}$$

Ahora $\left[\frac{4}{9}\frac{\sqrt{16-x^2}}{4x}\right]_1^3 = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{7}}{9}$ $\boxed{\textbf{1 punto}}$

d) $\boxed{\text{9 puntos}}$ $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}dx$

Solución

$$\frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}dx = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad \boxed{\textbf{1 punto}}$$

$$\begin{aligned} 3x^2-4x+5 &= A(x^2+1) + (x-1)(Bx+C) \\ &= Ax^2 + A + Bx^2 + Cx - Bx - C \\ &= (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C \qquad \boxed{\textbf{2 puntos}} \end{aligned}$$

Ahora

$$f(x) = \begin{cases} A+B=3 & (1) \\ C-B=-4 & (2) \\ A-C=5 & (3) \end{cases}$$

De (2) y (3)

$$\begin{cases} A-B=1 \\ A+B=3 \end{cases} \to 2A=4 \to A=2$$

Luego $A+B=3 \to 2+B=3 \to B=1$ y $C-B=-4 \to C=-3$ $\boxed{\textbf{3 puntos}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2-4x+5}{(x-1)(x^2+1)}dx &= \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{x-3}{x^2+1}dx \\ &= 2\ln|x-1| + \int \frac{x}{x^2+1}dx - 3\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan(x) + C \qquad \boxed{\textbf{3 puntos}} \end{aligned}$$

2. $\boxed{\text{17 puntos}}$ Analice la convergencia o divergencia de las siguientes integrales. De ser convergente debe calcularla. Clasifíquela en primera, segunda o tercer especie.

a) $\boxed{\text{10 puntos}}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

Solución

Considere
$$\begin{array}{c|c} u = \ln x & dv = \frac{1}{x^2}dx \\ \hline du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{-1}{x} \end{array}$$
$\boxed{\textbf{1 punto}}$

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln(x)}{x^2} & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^b - \int_1^b \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \right) & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2} dx \right) & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^b - \left[x^{-1} \right]_1^b \right) & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\left(\frac{-\ln b}{b} - \frac{1}{b} \right) - (-1) \right) & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-\ln b - 1 + b}{b} \right) & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-\frac{1}{b} - 0 + 1}{1} \right) = 1 \quad (Usando\ LHopital) & \boxed{\textbf{2 puntos}}
\end{aligned}$$

$\therefore \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$ converge a 1 $\boxed{\textbf{1 punto}}$

b) $\boxed{\text{7 puntos}}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución

Considere $u = x^2 - 1 \to du = 2xdx$. Ahora $\boxed{\textbf{1 punto}}$

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$ $\boxed{\textbf{1 punto}}$

Note que: $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \cdot 2\left[\sqrt{u}\right] = \sqrt{u} = \sqrt{x^2-1}.$ $\boxed{\textbf{1 punto}}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{b\to\infty} [\sqrt{x^2-1}]_2^b & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \sqrt{b^2-1} - \sqrt{3} & \boxed{\textbf{1 punto}} \\
&= \infty & \boxed{\textbf{1 punto}}
\end{aligned}$$

$\therefore \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$ diverge. $\boxed{\textbf{1 punto}}$