UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Cálculo

IV Examen Parcial 2023

Sábado 28 de octubre

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen está compuesto únicamente por un parte de desarrollo, con un puntaje total de 65 puntos.
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen todas las respuestas del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Las respuestas anotadas en el enunciado de la prueba no serán tomadas en cuenta.
6. Para responder la parte de **desarrollo** debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
7. Utilice únicamente **bolígrafo** de tinta indeleble en sus respuestas. En caso de utilizar lápiz o corrector, esto podrá afectarle si deseara hacer reclamos.
8. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justiquen su respuesta. En caso de que realice cálculos numéricos que involucren razones trigonométricas, debe trabajar las unidades angulares en radianes. **No utilice aproximaciones decimales en sus respuestas numéricas.**

1. Demuestre, mediante el cálculo de la integral, que (9 puntos)

$$\int \arctan(2x)\,dx = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + C$$

2. Calcule las siguientes integrales. No es necesario simplificar el resultado.

   a) $\displaystyle\int \frac{2}{e^y\sqrt{e^{2y}-4}}dy$ (13 puntos)

   b) $\displaystyle\int \sec^4(3z)\tan^4(3z)\,dz$ (8 puntos)

   c) $\displaystyle\int \frac{2x^4+20x^2-4x+18}{x^3+9x}dx$ (12 puntos)

3. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En caso de ser convergente calcule su valor. Si la integral diverge a un infinito, debe indicarlo con el signo correspondiente.

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx$ (13 puntos)

   b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ (10 puntos)

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Proyecto MATEM-Cálculo

IV Examen Parcial 2023- Solucionario

Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justiquen su respuesta. En caso de que realice cálculos numéricos que involucren razones trigonométricas, debe trabajar las unidades angulares en radianes. **No utilice aproximaciones decimales en sus respuestas numéricas.**

1. Demuestre, mediante el cálculo de la integral, que

$$\int \arctan(2x)\,dx = x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + C$$

(9 puntos)

Se puede emplear la técnica de integración por partes, según el siguiente esquema.

$$\begin{aligned} u &= \arctan(2x) \Rightarrow du = \frac{2}{1+4x^2}dx \\ dv &= dx \Rightarrow v = x \end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \int \arctan(2x)\,dx &= x\arctan(2x) - \int x\cdot\frac{2}{1+4x^2}dx \\ &= x\arctan(2x) - 2\int \frac{x}{1+4x^2}dx \end{aligned}$$

Considere el cambio de variable $z = 1+4x^2 \Rightarrow dz = 8xdx \Rightarrow \dfrac{dz}{8} = xdx$ en la integral que no ha sido calculada. Así:

$$\int \frac{x}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{z}dz = \frac{1}{8}\ln|z| + c = \frac{1}{8}\ln\left|1+4x^2\right| + c$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int \arctan(2x)\,dx &= x\arctan(2x) - 2\left(\frac{1}{8}\ln\left|1+4x^2\right| + c\right) \\ &= x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + c \end{aligned}$$

2. Calcule las siguientes integrales. No es necesario simplificar el resultado.

   a) $\displaystyle\int \frac{2}{e^y\sqrt{e^{2y}-4}}dy$ (13 puntos)

   Se procede por medio del cambio de variable

$$u = e^y \Rightarrow du = e^y dy \Rightarrow \frac{1}{u}du = dy$$

   Así:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{e^y\sqrt{e^{2y}-4}}dy &= \int \frac{2}{u\sqrt{u^2-4}}\frac{1}{u}du \\ &= \int \frac{2}{u^2\sqrt{u^2-4}}du \end{aligned}$$

   Considere el cambio de variable $u = 2\sec\theta$, de donde

$$\begin{aligned} u^2 &= 4\sec^2\theta \\ \sqrt{u^2-4} &= 2\tan\theta \\ du &= 2\sec\theta\tan\theta d\theta \end{aligned}$$

   De este modo se trabaja la integral de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{u^2\sqrt{u^2-4}}du &= \int \frac{2}{4\sec^2\theta\cdot 2\tan\theta}\cdot 2\sec\theta\tan\theta d\theta \\ &= \int \frac{1}{2\sec\theta}d\theta \\ &= \int \frac{1}{2}\cos\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta + C \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{u^2-4}}{u} + C \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{e^{2y}-4}}{e^y} + C \end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \sec^4(3z)\tan^4(3z)\,dz$ (8 puntos)

Se puede descomponer el integrando para utilizar un cambio de variable:

$$\begin{aligned}\int \sec^4(3z)\tan^4(3z)\,dx &= \int \sec^2(3z)\tan^4(3z)\sec^2(3z)\,dz\\ &= \int \left(1+\tan^2(3z)\right)\tan^4(3z)\sec^2(3z)\,dz\end{aligned}$$

Considere el cambio de variable $u = \tan(3z) \Rightarrow du/3 = \sec^2(3z)\,dz$, de donde

$$\begin{aligned}\int \left(1+\tan^2(3z)\right)\tan^4(3z)\sec^2(3x)\,dz &= \int \left(1+u^2\right)u^2\frac{du}{3}\\ &= -\frac{1}{3}\int \left(u^2+u^4\right)du\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}\right)+C\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\tan^3(3z)}{3}+\frac{\tan^5(3z)}{5}\right)+C\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^4+20x^2-4x+18}{x^3+9x}dx$ (12 puntos)

Es posible aplicar una división algebraica de modo que

$$\begin{aligned}\frac{2x^4+20x^2-4x+18}{x^3+9x} &= 2x+\frac{2x^2-4x+18}{x^3+9x}\\ &= 2x+\frac{2x^2-4x+18}{x\left(x^2+9\right)}\end{aligned}$$

Si aplicamos fracciones parciales en el segundo término, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-4x+18}{x\left(x^2+9\right)} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+9}\\ \frac{2x^2-4x+18}{x\left(x^2+9\right)} &= \frac{Ax^2+9A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+9\right)}\end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned}2x^2-4x+18 &= Ax^2+9A+Bx^2+Cx\\ 2x^2-4x+18 &= (A+B)\,x^2+Cx+9A\end{aligned}$$

Es posible hallar los parámetros A, B y C por medio del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} A+B=2\\ C=-4\\ 9A=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2\\ B=0\\ C=-4\end{cases}$$

Así

$$\frac{2x^2-4x+18}{x\left(x^2+9\right)}=\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2+9}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^4+20x^2-4x+18}{x^3+9x}dx &= \int\left(2x+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2+9}\right)dx\\ &= x^2+2\ln|x|+\frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3}+C\end{aligned}$$

3. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En caso de ser convergente calcule su valor. Si la integral diverge a un infinito, debe indicarlo con el signo correspondiente.

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx$ (13 puntos)

   Considere
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} xe^{-x}dx$$
   El cálculo de la integral definida en el límite se puede realizar por medio de integración por partes. Considere el esquema
$$\begin{aligned} u &= x \Rightarrow du = dx \\ dv &= e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{aligned}$$
   Así
$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$
   Entonces
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} xe^{-x}dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-te^{-t} - e^{-t} - \left(te^{t} - e^{t}\right)\right] \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-te^{-t} - e^{-t} - e^{t}(t-1)\right] \end{aligned}$$
   En este caso, por medio de la Regla de L'Hôpital
$$\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t}} = 0$$
   de donde
$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-te^{-t} - e^{-t} - e^{t}(t-1)\right] = -\infty$$
   Es decir, la integral impropia diverge a $-\infty$.

b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$ (10 puntos)

La función de con criterio $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$ presenta una singularidad en $x = 0$, dado que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = +\infty$$

Considere

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$$

Vamos a proceder a realizar la integral evaluada en el límite de forma indefinida y finalmente se evalúan los límites de integración (otra alternativa es hacer el cálculo por cambio de variable y cambiar los límites de integración en el desarrollo de la nueva integral).

Considere el cambio de variable $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &= \int \frac{2udu}{(u^2+1)\,u} = \int \frac{2du}{u^2+1} \\ &= 2\arctan(u) + C = 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \left(2\arctan\left(\sqrt{2}\right) - 2\arctan\left(\sqrt{t}\right)\right) \\ &= 2\arctan\left(\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$