UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Cálculo
IV Examen Parcial 2022

Sábado 29 de octubre

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de una única parte de desarrollo y un total de 55 puntos.
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. Anote en su cuaderno de examen las respuestas en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible.
6. Para cada ítem debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
7. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Demuestre, mediante el cálculo de la integral, que $\int \cot(x)\, dx = \ln|\text{sen}(x)| + C$.
   (5 puntos)

2. Calcule las siguientes integrales. En la integral definida calcule el valor exacto.

   A) $\int_0^1 \arctan(x)\, dx$ (10 puntos)

   B) $\int \frac{3x^3 + 2x^2 - 2x + 2}{x^3 + x}\, dx$ (12 puntos)

   C) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$ (10 puntos)

   D) $\int \cos^3(x) \cdot \text{sen}^6(x)\, dx$ (6 puntos)

   E) $\int e^{-x} \cos(2x)\, dx$ (12 puntos)

Fin del examen

Proyecto MATEM-Cálculo

IV Examen Parcial 2022 - Solucionario

Desarrollo

1. Demuestre, mediante el cálculo de la integral, que $\int \cot(x)\, dx = \ln|\text{sen}(x)| + C$.
   (5 puntos)

   Solución:

   $$\int \cot(x)\, dx = \int \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\, dx$$

   Sustitución:
   $u = \text{sen}(x) \quad \rightarrow \quad du = \cos(x)\, dx$

   $$= \int \frac{1}{u}\, du$$

   $$= \ln|u| + C$$

   $$= \ln|\text{sen}(x)| + C$$

2. Calcule las siguiente integrales. En la integral definida calcule el valor exacto.

   A) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(x)\, dx$ (10 puntos)

   Solución:

   Integración por partes:

   $$u = \arctan(x) \qquad dv = dx$$
   $$du = \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad v = x$$

   $$= (x \cdot \arctan(x))\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

   Sustitución:

   $$w = 1 + x^2 \qquad dw = 2x\, dx \to \frac{dw}{2} = x\, dx$$

   $$Si\ x = 0 \to w = 1 \qquad Si\ x = 1 \to w = 2$$

   $$= (x \cdot \arctan(x))\Big|_0^1 - \int_1^2 \frac{1}{w}\, \frac{dw}{2}$$
   $$= (x \cdot \arctan(x))\Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln|w|\Big|_1^2$$
   $$= (1 \cdot \arctan(1)) - (0 \cdot \arctan(0)) - \frac{1}{2}(\ln|2| - \ln|1|)$$
   $$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$$

B) $\displaystyle\int \frac{3x^3+2x^2-2x+2}{x^3+x}\,dx$ (12 puntos)

Solución:

División algebraica:
$$\frac{3x^3+2x^2-2x+2}{x^3+x} = 3 + \frac{2x^2-5x+2}{x^3+x}$$

Fracciones parciales:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2-5x+2}{x^3+x} &= \frac{2x^2-5x+2}{x\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,x}{x\left(x^2+1\right)} \\
2x^2-5x+2 &= Ax^2+A+Bx^2+Cx
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \quad \rightarrow B=0 \\ C=-5 \\ A=2 \end{cases}$$

Entonces:

$$\int \frac{3x^3+2x^2-2x+2}{x^3+x}\,dx = \int \left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{\left(x^2+1\right)}\right)\,dx$$

$$= 3x + 2\ln|x| - 5\arctan(x) + \mathcal{C}$$

C) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx$ (10 puntos)

Solución:

Sustitución trigonométrica:

Para $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ $\pi \leq \theta < \dfrac{3\pi}{2}$
$x = 3\sec(\theta) \quad \rightarrow \quad dx = 3\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$
$x^2 = 9\sec^2(\theta)$

$$= \int \frac{3\sec(\theta)\tan(\theta)}{9\sec^2(\theta)\sqrt{9\sec^2(\theta)-9}}\,d\theta$$

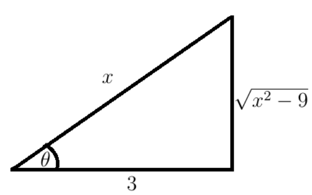
$$= \int \frac{3\sec(\theta)\tan(\theta)}{9\sec^2(\theta)\cdot 3\tan(\theta)}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{9\sec(\theta)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\int \cos(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\operatorname{sen}(\theta) + C$$

Como $x = 3\sec(\theta) \rightarrow \dfrac{x}{3} = \sec(\theta)$



Entonces
$$= \frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} + C$$

D) $\int \cos^3(x) \cdot \operatorname{sen}^6(x)\, dx$ (6 puntos)

Solución:

$$\int \cos^3(x) \cdot \operatorname{sen}^6(x)\, dx$$

$$= \int \cos^2(x) \cdot \operatorname{sen}^6(x) \cos(x)\, dx$$

$$= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2(x)\right) \cdot \operatorname{sen}^6(x) \cos(x)\, dx$$

Sustitución:
$u = \operatorname{sen}(x) \quad \to \quad du = \cos(x)\, dx$

$$= \int \left(1 - u^2\right) \cdot u^6\, du$$

$$= \int \left(u^6 - u^8\right)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} - \frac{\operatorname{sen}^9(x)}{9} + \ C$$

3. $\displaystyle\int e^{-x}\cos(2x)\;dx$ (12 puntos)

Solución:

Integración por partes:

$$u = \cos(2x) \qquad dv = e^{-x}\,dx$$
$$du = -2\operatorname{sen}(2x)\,dx \qquad v = -e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - \int -e^{-x}\cdot -2\operatorname{sen}(2x)\,dx$$

$$= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\int e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(2x)\,dx$$

Integración por partes:

$$u = \operatorname{sen}(2x) \qquad dv = e^{-x}\,dx$$
$$du = 2\cos(2x)\,dx \qquad v = -e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\cdot\cos(2x) - 2\left[-e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(2x) - \int -e^{-x}\cdot 2\cos(2x)\,dx\right]$$

$$= -e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(2x) - 4\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx$$

Entonces

$$\int e^{-x}\cos(2x)\;dx = -e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(2x) - 4\int e^{-x}\cdot\cos(2x)\,dx$$

Tome $I = \displaystyle\int e^{-x}\cos(2x)\;dx$

$$I = -e_{-x}\cdot\cos(2x) + 2e_{-x}\cdot\operatorname{sen}(2x) - 4I$$

$$I = \frac{-e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(2x)}{5}$$

Por tanto

$$\int e^{-x}\cos(2x)\;dx = \frac{-e^{-x}\cdot\cos(2x) + 2e^{-x}\cdot\operatorname{sen}(2x)}{5} + C$$