

CUARTO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

27 de setiembre de 2017

INSTRUCCIONES GENERALES:

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado, éste no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- Esta es una prueba de desarrollo, por lo tanto debe incluir en su cuaderno de examen **todos los procedimientos** que justifiquen la respuesta.
- La prueba consta de 58 puntos.
- El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas.

1) Demuestre: (6 y 9 puntos, respectivamente)

(a) Calcule $\int \sec(x) dx$ para demostrar que es igual a $\ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$.

(b) Calcule $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x+1}}{10^x} dx$ para demostrar que es igual a $-2 \left(\frac{5^{-x}}{\ln 5}\right) + 5 \left(\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right) + C$.

2) Calcule las siguientes integrales: (7, 8, 10 y 7 puntos, respectivamente)

(a) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$.

(b) $\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} dx$.

(c) $\int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} dx$.

(d) $\int \sin^4(x) dx$.

3) Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En caso de ser convergente calcule su valor. (6 y 5 puntos, respectivamente)

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx$. Puede utilizar parte 1a)

SOLUCIÓN

CUARTO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

27 de setiembre de 2017

1a) (6 puntos) Calcule $\int \sec(x) dx$ para demostrar que es igual a $\ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$.

$$\int \sec(x) dx =$$

$$\int \sec(x) \cdot \frac{[\sec(x) + \tan(x)]}{[\sec(x) + \tan(x)]} dx =$$

Sea $u = \sec(x) + \tan(x) \Rightarrow du = \sec(x) \tan(x) + \sec^2(x) dx = \sec(x)[\tan(x) + \sec(x)] dx$, entonces

$$\int \sec(x) \cdot \frac{[\sec(x) + \tan(x)]}{[\sec(x) + \tan(x)]} dx = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| + C =$$

$$= \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$

1b) (6 puntos) Calcule $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x+1}}{10^x} dx$ para demostrar que es igual a $-2 \left(\frac{5^{-x}}{\ln 5} \right) + 5 \left(\frac{2^{-x}}{\ln 2} \right) + C$.

Primero se expresa el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{2^{x+1} - 5^{x+1}}{10^x} =$$

$$\frac{2^{x+1}}{10^x} - \frac{5^{x+1}}{10^x} =$$

$$\frac{2 \cdot 2^x}{10^x} - \frac{5 \cdot 5^x}{10^x} =$$

$$2 \left(\frac{1}{5} \right)^x - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

$$\text{Luego: } \int \frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{10^x} dx = 2 \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - 5 \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$$

$$2 \int 5^{-x} dx - 5 \int 2^{-x} dx$$

Calculemos una, la otra se obtiene de forma análoga:

$$2 \int 5^{-x} dx$$

Sea $u = 5^{-x} \Rightarrow du = -5^{-x} \ln(5) dx \Rightarrow \frac{-1}{\ln(5)} du = 5^{-x} dx$, entonces

$$2 \int 5^{-x} dx = 2 \cdot \frac{-1}{\ln(5)} \int du =$$

$$2 \cdot \frac{-1}{\ln(5)} u + C =$$

$$2 \cdot \frac{-1}{\ln(5)} 5^{-x} + C$$

Luego para $5 \int 2^{-x} dx = 5 \cdot \frac{-1}{\ln(2)} 2^{-x} + C$. Por lo tanto

$$2 \int 5^{-x} dx - 5 \int 2^{-x} dx = 2 \left(\frac{5^{-x}}{\ln(5)}\right) + 5 \left(\frac{2^{-x}}{\ln(2)}\right) + C$$

Calcule las siguientes integrales

2a) (7 puntos) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

Sea $y^2 = x \Rightarrow 2y dy = dx$

Cambio de los límites de integración: Si $x = 1 \Rightarrow y = 1$, si $x = 4 \Rightarrow y = 2$.

Luego

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^2 e^y y dy$$

Integración por partes:

$$u = y \Rightarrow du = dy$$

$$dv = e^y dy \Rightarrow v = e^y$$

$$\text{Ahora } 2 \int_1^2 e^y y \, dy = 2 \left(ye^y \Big|_1^2 - \int_1^2 e^y \, dy \right)$$

$$2 \left(ye^y \Big|_1^2 - e^y \Big|_1^2 \right) =$$

$$2e^2$$

$$\mathbf{2b) (8 \text{ puntos})} \int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \, dx.$$

$$\text{Sea } 2x = \sec(\theta) \text{ entonces, } dx = \frac{1}{2} \sec(\theta) \tan(\theta) \, d\theta$$

Luego $4x^2 - 1 = \sec^2(\theta) - 1 = \tan^2(\theta)$, entonces se considera la siguiente integral

$$\int \frac{\frac{\tan(\theta)\sec(\theta)\tan(\theta)}{2}}{\frac{\sec(\theta)}{2}} \, d\theta =$$

$$\int \tan^2(\theta) \, d\theta =$$

$$\int \sec^2(\theta) - 1 \, d\theta =$$

$$\tan(\theta) - \theta + C =$$

$$\sqrt{4x^2 - 1} - \sec^{-1}(2x) + C$$

2c) (10 puntos) $\int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} dx.$

Descomponiendo en fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+7}$$

$$\frac{x^2 + 7x - 6}{(x + 1)(x^2 - 4x + 7)} = \frac{A(x^2 - 4x + 7) + (Bx + C)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - 4x + 7)}$$

$$x^2 + 7x - 6 = A(x^2 - 4x + 7) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$A = -1$$

$$C = 1$$

$$B = 2$$

Luego

$$\int \frac{x^2+7x-6}{(x+1)(x^2-4x+7)} dx = -\int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2x-4}{x^2-4x+7} dx + \frac{5}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1} dx =$$

$$-\ln|x+1| + \ln|x^2-4x+7| + \frac{5\sqrt{3}}{9} \arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + C$$

2d) (7 puntos) $\int \text{sen}^4(x) dx.$

$$\int \cos^2(x) dx = \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{4} \int (1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)) dx =$$

$$\frac{1}{4} x + \frac{\text{sen}(2x)}{4} + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx =$$

$$\frac{1}{8} x + \frac{\text{sen}(2x)}{4} + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \text{sen}(4x) =$$

3a) (6 puntos) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx \right) =$$

Calculando $\int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx = \arctan(e^x) + C$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(e^x) \Big|_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(e^n) - \arctan(e^0) =$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ converge a $\frac{\pi}{4}$

3b) (5 puntos) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx =$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^n \sec(x) dx =$$

De la parte 1a)

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln|\sec(x) + \tan(x)| \Big|_0^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln|\sec(n) + \tan(n)| - \ln 1 =$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln|\sec(n) + \tan(n)| - \ln 1 = +\infty$$

Por lo tanto, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx$ diverge