Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

CUARTO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

Miércoles 28 de setiembre de 2016

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Para resolver este examen, utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble, que sea azul o negra.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- **Este examen es de desarrollo, por lo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de 2 partes, con un total de 43 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

1. Calcule las siguientes integrales:

a. $\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dr}{4+9r^2}$ 4 puntos.

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dr}{4+9r^2} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dr}{1+\left(\frac{3r}{2}\right)^2}$$

Sea $u = \frac{3r}{2}$ entonces $r = \frac{2u}{3}$ y por lo tanto $dr = \frac{2}{3}du$

- Si $r = 0$ entonces $u = 0$
- Si $r = \frac{2}{\sqrt{3}}$ entonces $u = \sqrt{3}$

Por lo tanto la integral es igual a

$$\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+u^2}\frac{2}{3}du = \frac{1}{6}\arctan u\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\left(\arctan\sqrt{3} - \arctan 0\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{18}$$

b. $\int_0^1 x \operatorname{arcsen} x^2\, dx$ 9 puntos.

$$\int_0^1 x \operatorname{arcsen} x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{arcsen} x^2\, 2xdx$$

Sea $r = x^2$ entonces $dr = 2xdx$

- Si $x = 0$ entonces $r = 0$

- Si $x = 1$ entonces $r = 1$

Por lo tanto la integral es igual a

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{arcsen} r\, dr$$

Si $f(r) = \operatorname{arcsen} r$ entonces $f\,\acute{}(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$
Si $g\,\acute{}(r) = 1$ entonces $g(r) = r$

Entonces

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{arcsen} r\, dr = \frac{1}{2}\left(r \operatorname{arcsen} r|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 \operatorname{arcsen} 1 - 0 \operatorname{arcsen} 0 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{-2r}{\sqrt{1-r^2}} dr \right)$$

Sea $k = 1 - r^2$ entonces $dk = -2rdr$
Si $r = 0$ entonces $k = 1$
Si $r = 1$ entonces $k = 0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_1^0 k^{-\frac{1}{2}} dk \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + k^{\frac{1}{2}}\Big|_1^0 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 1 \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

c. $\int \cos^4\left(\frac{w}{2}\right) d$ 8 puntos

Sea $x = \frac{w}{2}$ entonces $w = 2x$ y $dw = 2\ dx$ por lo tanto la integral es igual a

$$2\int \cos^4(x)\,dx = 2\int (\cos^2(x))^2\,dx = 2\int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$
$$= 2\int \frac{1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2 + 4\cos(2x) + 1 + \cos(4x)}{2} dx$$
$$= \frac{1}{4}\int 3 + 4\cos(2x) + \cos(4x)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\left(3x + 4\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4}\right) + C$$
$$= \frac{3}{4}x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(4x)}{16} + C$$
$$= \frac{3}{8}w + \frac{\operatorname{sen}(w)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2w)}{16} + C$$

d. $\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{y^2-3}}{y} dy$ 6 puntos

Sea $y = \sqrt{3}\sec x$ entonces $dy = \sqrt{3}\sec x \tan x\ \ dx$ y $x = \operatorname{arcsec}\frac{y}{\sqrt{3}}$

$$\sqrt{y^2-3} = \sqrt{3\sec^2 x - 3} = \sqrt{3}\tan x$$

Si $y = \sqrt{3}$ entonces $x = \operatorname{arcsec} 1 = 0$

Si $y = 2$ entonces $x = \operatorname{arcsec}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

Entonces

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{y^2-3}}{y} dy = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}\sec x} \sqrt{3}\sec x \tan x \; dx = \sqrt{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x \; dx$$

$$= \sqrt{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x - 1 \; dx = \sqrt{3}(\tan x - x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \sqrt{3}\left(\tan\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$$

e. $\int \frac{x^3-2x-4}{(x^2-x)(x^2+4)} dx$ 8 puntos

$$\frac{x^3-2x-4}{(x^2-x)(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$x^3-2x-4 = A(x^2+4)(x-1) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x-1)$$

Si $x = 0$ $-4 = -4A \rightarrow A = 1$

Si $x = 1$ $-5 = 5B \rightarrow B = -1$

Si $x = -2$ $-8 = -24 + 16 + 6D - 12C \rightarrow 6D - 12C = 0 \rightarrow D = 2C$

Si $x = -1$ $-3 = -10 + 5 + 2D - 2C \rightarrow 2D - 2C = 2 \rightarrow D = C + 1$

$$C + 1 = 2C \rightarrow C = 1, \qquad D = 2$$

Por lo tanto

$$\int \frac{x^3-2x-4}{(x^2-x)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+4}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} + 2\frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{2}{2}\arctan\frac{x}{2} + K$$
$$= \ln|x| - \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \arctan\frac{x}{2} + K$$

2. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En caso de ser convergente calcule su valor.

a. $\int_0^2 \frac{x}{(4-x^2)^3}\,dx$ 5 puntos.

- Integral indefinida:

$$\int \frac{x}{\left(4-x^2\right)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2x(4-x^2)^{-3}\,dx$$

Sea $u = 4 - x^2$ entonces $du = -2x\,dx$

$$-\frac{1}{2}\int -2x(4-x^2)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\int u^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2} + C$$
$$= \frac{1}{4}(4-x^2)^{-2} + C$$

- Integral impropia:

$$\int_0^2 \frac{x}{(4-x^2)^3}dx = \lim_{b\to 2^-}\int_0^b \frac{x}{(4-x^2)^3} = \lim_{b\to 2^-}\frac{1}{4(4-x^2)^2}\Bigg|_0^b$$
$$= \lim_{b\to 2^-}\left[\frac{1}{4(4-b^2)^2}-\frac{1}{64}\right] = +\infty$$

Por lo tanto la integral diverge.

b. $\int_1^\infty \frac{du}{5+4u+u^2}$ 6 puntos

1. Definición de integral impropia:

$$\int_1^\infty \frac{du}{5+4u+u^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{du}{5+4u+u^2}$$

2. Integral indefinida

$$2+u=v, \quad du=dv$$

$$\int \frac{du}{5+4u+u^2} = \int \frac{du}{1+4+4u+u^2} = \int \frac{du}{1+(2+u)^2} = \int \frac{du}{1+v^2}$$
$$= \arctan v + C = \arctan(2+u) + C$$

3. Integral definida

$$\int_1^b \frac{du}{5+4u+u^2} = \arctan(2+b) - \arctan(3)$$

4. Integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{du}{5+4u+u^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{du}{5+4u+u^2}$$
$$= \lim_{b\to+\infty} [\arctan(2+b) - \arctan(3)] = \frac{\pi}{2} - \arctan(3)$$

Por lo tanto la integral impropia converge a $\frac{\pi}{2} - \arctan(3)$