Universidad de Costa Rica

Instituto Tecnológico de Costa Rica

TERCER EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

SOLUCIÓN

31 de agosto de 2016

1. Sea F una función, tal que $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{1}{1+t^4}\,dt$, $x\geq 1$. Con base en la información:

(2, 3 puntos respectivamente)

(a) Calcule $F(1)$

$$F(1)=\int_{1}^{1}\frac{1}{1+t^4}\,dt=0$$

(b) Verifique que $F'(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$

$$F'(x)=\frac{1}{1+x^4}-\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot\frac{-1}{x^2}=$$

$$\frac{1}{1+x^4}-\frac{x^4}{x^4+1}\cdot\frac{-1}{x^2}=$$

$$\frac{1}{1+x^4}+\frac{x^2}{x^4+1}=$$

$$\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

2. Considere la función f , cuyo gráfica pasa por D, es tangente a la recta $\mathcal{L}$ en A y $f''(x)=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}-2$. Además $B=\left(0,\frac{-15}{16}\right)$, $A=\left(\frac{1}{4},\frac{-7}{16}\right)$ y $D=(1,0)$.

Con base en la información determine $f(x)$. (8 puntos)

La pendiente de la recta $\mathcal{L}$: $m=2$

Luego, como $\mathcal{L}$ es tangente a la curva en A, por definición de derivada puntual $f'\left(\frac{1}{4}\right)=2$

Además $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-7}{16}$.

Ahora $\int f''(x)dx=\int\left(\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}-2\right)dx \Rightarrow f'(x)=x^{\frac{-1}{2}}-2x+C$

Como $f'\left(\frac{1}{4}\right)=2 \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

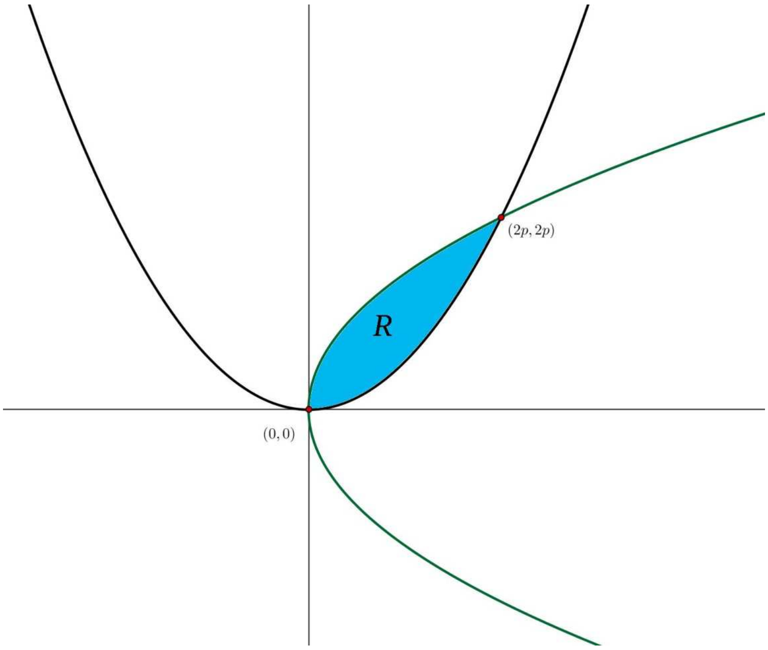
Análogamente $\int f'(x)dx=\int\left(x^{\frac{-1}{2}}-2x+\frac{1}{2}\right)dx \Rightarrow f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-x^2+\frac{1}{2}x+K$

Como $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-7}{16} \Rightarrow K=\frac{-3}{2}$

Finalmente $f(x)=2x^{\frac{1}{2}}-x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

3. Si p es una constante, tal que $p > 1$, considere las parábolas definidas por $y^2 = 2px$ y $x^2 = 2py$: (3 y 6 puntos respectivamente)

(a) Represente la región comprendida entre las parábolas.



$$y^2 = 2px$$
$$x^2 = 2py$$

(b) Demuestre que en área de la región comprendida entre las parábolas es $\dfrac{4p^2}{3}$

$$\int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx =$$

$$\left. \left(\sqrt{2p}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p} \right) \right|_0^{2p} =$$

$$\sqrt{2p}\,\frac{2}{3}(2p)^{\frac{3}{2}} - \frac{(2p)^3}{6p} = \frac{8}{3}p^2 - \frac{8}{6p}p^3 = \frac{8}{3}p^2 - \frac{4}{3}p^2 = \frac{4p^2}{3}$$

4. Utilice sumas de Riemann para calcular $\int_1^3 \left(2+x^2\right)dx$ (7 puntos)

$$\int_1^3 \left(2+x^2\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\left(1+\frac{2}{n}i\right)^2\right)\cdot\frac{2}{n} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3+\frac{4i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left(3n+\frac{4n(n+1)}{2n}+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(6+4\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{3}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(6+4\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{3}\right) = \frac{38}{3}$$

5. Calcule las siguientes integrales: (5, 5 y 6 puntos respectivamente)

(a) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+4\sqrt{x}\right)}dx$

Sea $u = 1+4\sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{2}du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Entonces $\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{\ln\left|1+4\sqrt{x}\right|}{2} + C$

(b) $\int x^{-2}\sin\left(\frac{1}{x}+\pi\right)\cos^2\left(\frac{1}{x}+\pi\right)dx$

Sea $u=\cos\left(\frac{1}{x}+\pi\right)\Rightarrow du=-\sin\left(\frac{1}{x}+\pi\right)\cdot\frac{-1}{x^2}dx\Rightarrow$
$-du=\sin\left(\frac{1}{x}+\pi\right)\cdot x^{-2}dx$

Entonces $\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C=\frac{\cos^3\left(\frac{1}{x}+\pi\right)}{3}+C$

(c) $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{x+3}}dx$

Sea $u=x+3\Rightarrow du=dx$

Sea $u-3=x\Rightarrow u^2-6u+9=x^2$

Entonces $\int\frac{u^2-6u+9}{\sqrt[3]{u}}du=$

$\int u^{\frac{5}{3}}-6u^{\frac{2}{3}}+9u^{\frac{-1}{3}}du=$

$\frac{3u^{\frac{8}{3}}}{8}-\frac{18u^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{27u^{\frac{2}{3}}}{2}+C$

$\frac{3(x+3)^{\frac{8}{3}}}{8}-\frac{18(x+3)^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{27(x+3)^{\frac{2}{3}}}{2}+C$