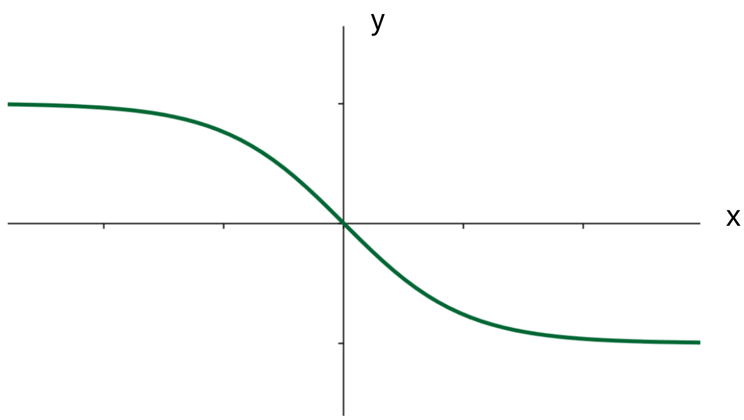
SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

30 de agosto de 2017

1) Considere la función f cuya gráfica se muestra a continuación:



Con base en la información y sabiendo que $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$, determine $f(x)$. *(7 puntos)*

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \Rightarrow \int f'(x)dx = \int \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx$$

Sea $k = e^{2x} + 1 \Longrightarrow dk = 2e^{2x}dx$

$2\int \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}dx = 2\int \frac{1}{k^2}du =$

$2\int k^{-2}dk = 2\frac{k^{-1}}{-1} + C =$

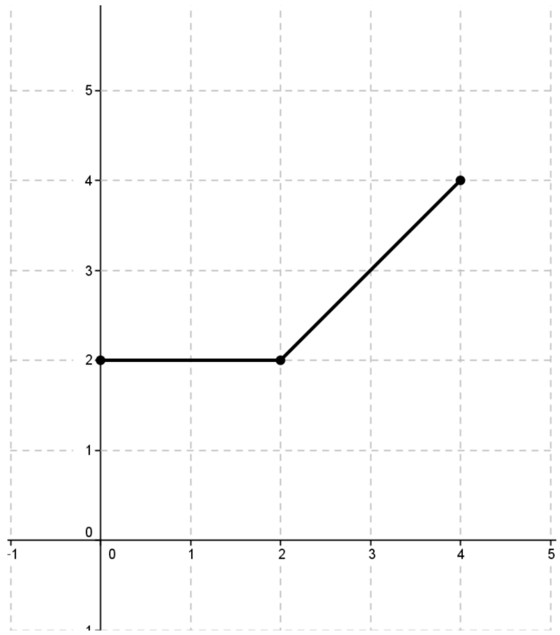
$\frac{-2}{k} + C = \frac{-2}{e^{2x}+1} + C$

De acuerdo con la gráfica $f(0) = 0 \Longrightarrow \frac{-2}{e^0+1} + C = 0$

$\Longrightarrow -1 + C = 0 \Longrightarrow C = 1$

Por tanto $f(x) = \frac{-2}{e^{2x}+1} + 1.$

2) Considere la función f cuya gráfica se muestra a continuación. Si $A(x) = \int_0^x f(t)dt$, determine $A(2), A(4), A'(1)$ y $A'(3)$. *(6 puntos)*



$A(2) = \int_0^2 f(t)dt = 2 \cdot 2 = 4$

$A(4) = \displaystyle\int_0^4 f(t)dt = \int_0^2 f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt =$

$4 + \frac{(2+4)\cdot 2}{2} = 10$

$A'(x) = f(x)$

$A'(1) = f(1) = 2$

$A'(3) = f(3) = 3$

3) Sean $y = e^{g(x)}$ y $g(x) = \int_{\log x}^{2\log(x+1)} 10^t dt$. Compruebe que $y' = \frac{(2x+1)y}{\ln 10}$. *(7 puntos)*

$y' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

$g'(x) = 10^{2\log(x+1)} \frac{2}{(x+1)\ln 10} - 10^{\log(x)} \frac{1}{(x)\ln 10}$

Simplificando:

$g'(x) = 10^{\log(x+1)^2} \frac{2}{(x+1)\ln 10} - \frac{x}{(x)\ln 10} =$

$(x+1)^2 \frac{2}{(x+1)\ln 10} - \frac{x}{(x)\ln 10}$

$\frac{2(x+1)}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10} =$

$\frac{2x+1}{\ln 10}$

Por tanto

$y' = y \cdot \frac{2x+1}{\ln(10)}$

4) Calcule las siguientes integrales: *(4,5,4 y 7 puntos, respectivamente)*

(a) $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx$

$\arctan(x) + \frac{ln(1+x^2)}{2} + C$

(b) $\int \frac{x^5}{(x^3+7)^{\frac{5}{2}}} dx = \int \frac{x^3 \cdot x^2}{(x^3+7)^{\frac{5}{2}}} dx$

Sea $k = x^3 + 7 \Longrightarrow dk = 3x^2 dx$

$\frac{1}{3} \int \frac{k-7}{k^{\frac{5}{2}}} dk$

$\frac{1}{3} \int \frac{k}{k^{\frac{5}{2}}} dk - \frac{7}{3} \int \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}} dk =$

$\frac{1}{3} \int k^{\frac{-3}{2}} dk - \frac{7}{3} \int k^{\frac{-5}{2}} dk =$

$\frac{-2k^{\frac{-1}{2}}}{3} + \frac{14k^{\frac{-3}{2}}}{9} + C$

$\frac{-2(x^3+7)^{\frac{-1}{2}}}{3} + \frac{14(x^3+7)^{\frac{-3}{2}}}{9} + C$

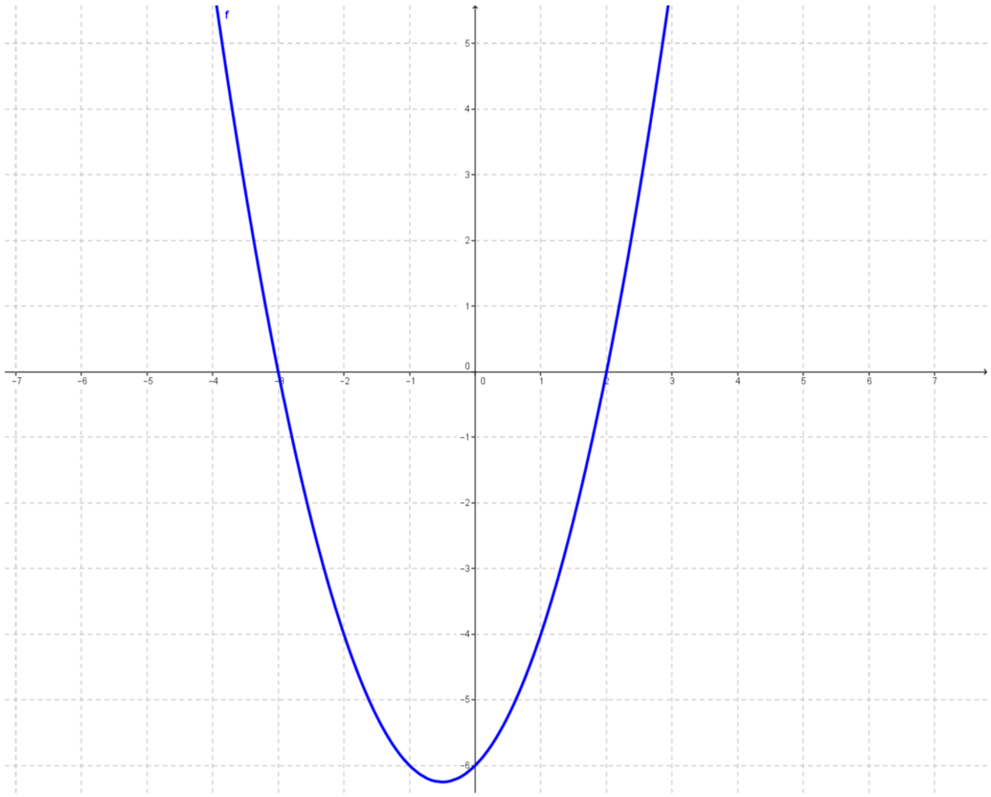
(c) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x^3)^2}} dx$

Sea $k = x^3 \Longrightarrow dk = 3x^2 dx$

$\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} dx = \frac{1}{3} arcsen(k) + C$

$\frac{1}{3} arcsen(x^3) + C$

(d) $\int_{-1}^{5} |x^2 + x - 6| dx$

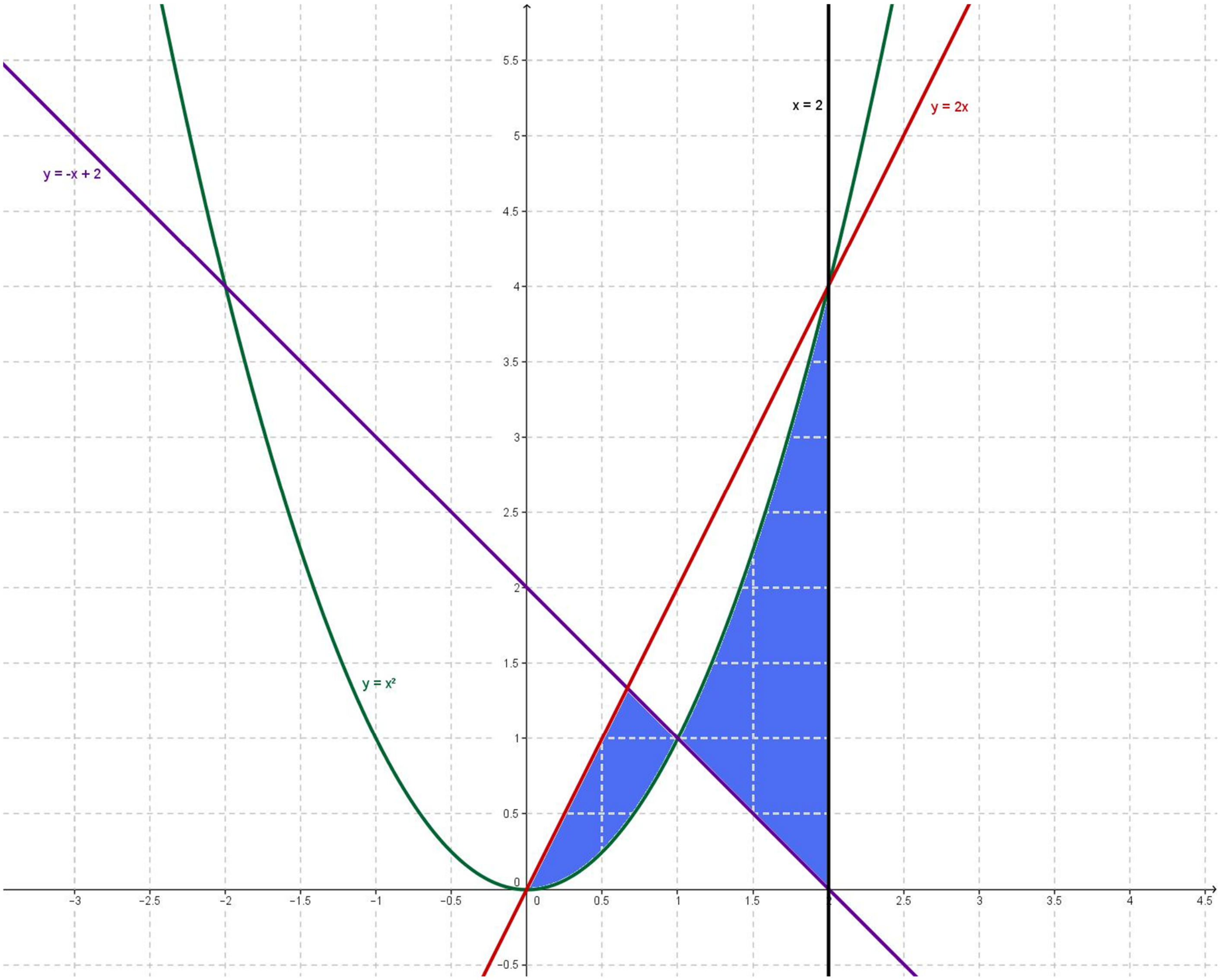


$$\int_{-1}^{5} |x^2 + x - 6| dx = \int_{-1}^{2} -x^2 - x + 6 dx + \int_{2}^{5} x^2 + x - 6 dx$$

$$= \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \quad \Big|_{-1}^{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \quad \Big|_{2}^{5}$$

$$\frac{27}{2} + \frac{63}{2} = 45$$

5) De acuerdo con la información adjunta, defina cada una de las integrales que determinan el área de la región sombreada (No es necesario calcularlas): *(6 puntos)*



$$\int_0^{\frac{2}{3}} (2x - x^2)\,dx$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} (-x + 2 - x^2)\,dx$$

$$\int_1^2 (x^2 + x - 2)\,dx$$