Cálculo

III Examen Parcial 2023

Sábado 9 de setiembre

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.

2. Este examen consta de 2 partes: respuesta corta (4 puntos) y desarrollo (53 puntos), para un total de 57 puntos.

3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.

4. La prueba debe resolverse individualmente.

5. **Anote en su cuaderno de examen todas las respuestas de las dos partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Las respuestas anotadas en el enunciado de la prueba no serán tomadas en cuenta.

6. En los **ítems de respuesta corta**, usted deberá indicar en el cuaderno de examen el número de ítem e indicar solamente la respuesta a la pregunta que se le plantea. Sólo se calificará la respuesta que se encuentre escrita en el cuaderno de examen.

7. Para responder la parte de **desarrollo** debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.

8. Utilice únicamente **bolígrafo** de tinta indeleble en sus respuestas. En caso de utilizar lápiz o corrector, esto podrá afectarle si deseara hacer reclamos.

9. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Respuesta corta

Determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. Para todos los ítems, considere la información que se presenta a continuación. (4 puntos, un punto cada respuesta correcta)

Sea $c \in [a,b]$. Se tienen las funciones f, g, definidas e integrables en $[a,b]$, tales que:

$$\int_a^c f(x)dx = 2, \qquad \int_c^b f(x)dx = -2, \qquad \int_b^a g(x)dx = -3.$$

Además, se tiene una función F definida en $[a,b]$ que satisface $F'(x) = f(x) + 2$ para todo $x \in \,]a,b[$.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \; =$ ________

2. $\displaystyle\int_a^b f(x) + 2g(x)\,dx \; =$ ________

3. $\displaystyle\int f(x)\,dx \; =$ ________

4. La derivada de la función $\displaystyle\int_{x^3}^b f(t)\,dt$ es: ________

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen **todos** los procedimientos que justifiquen su respuesta. **No utilice aproximaciones decimales en sus respuestas numéricas**

1. Utilice sumas de Riemann para demostrar que $\int_1^3 4x\,dx = 16$ (8 puntos)

2. Encuentre el criterio de la función f que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{4}{x^2} \\ f'(1) = 1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

(7 puntos)

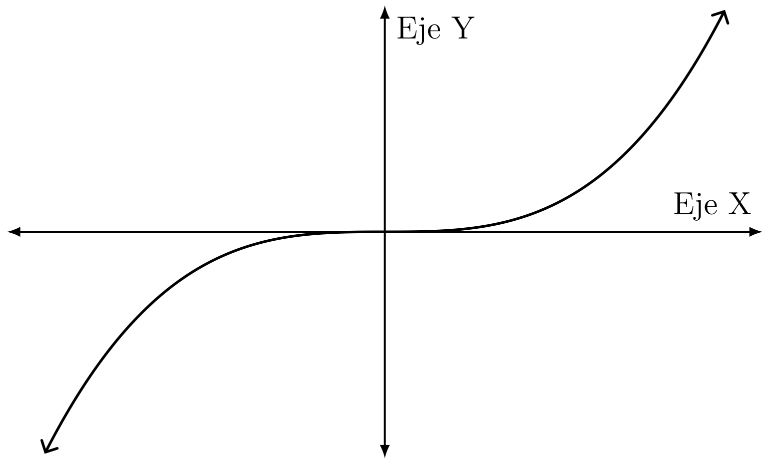
3. Calcule las siguientes integrales. No es necesario simplificar el resultado.

A) $\displaystyle\int \frac{2e^{-x} + e^{2x}}{e^x}\,dx$ (8 puntos)

B) $\displaystyle\int_2^3 2x^3 \cdot \sqrt{x^2 - 1}\,dx$ (10 puntos)

C) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x - 7}\,dx$ (6 puntos)

4. La siguiente es la gráfica de la función con criterio $f(x) = x^3$.



Sea R la región del plano cartesiano delimitada por las curvas $y = x^3$, $y = 0$, $x + 5 = 0$ y $x - 5 = 0$.

A) Realice un dibujo de la región R. (3 puntos)

B) Calcule el área de la región R. (6 puntos)

C) Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región R en torno al eje x. (5 puntos)

Fin del examen

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Proyecto MATEM-Cálculo
III Examen Parcial 2023- Solucionario

I parte: Respuesta corta

Determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. Para todos los ítems, considere la información que se presenta a continuación. (4 puntos, un punto cada respuesta correcta)

Sea $c \in [a, b]$. Se tienen las funciones f, g, definidas e integrables en $[a, b]$, tales que:

$$\int_a^c f(x)dx = 2, \qquad \int_c^b f(x)dx = -2, \qquad \int_b^a g(x)dx = -3.$$

Además, se tiene una función F definida en $[a, b]$ que satisface $F'(x) = f(x) + 2$ para todo $x \in \,]a, b[$.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x) + 2g(x)dx = 6$

3. $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) - 2x + C$

4. La derivada de la función $\displaystyle\int_{x^3}^b f(t)dt$ es: $-3x^2 f(x^3)$

II parte: Desarrollo

1. Utilice sumas de Riemann para demostrar que $\displaystyle\int_1^3 4x dx = 16$ (8 puntos)

La partición uniforme en n subintervalos de $[1, 3]$ está dada por

$$\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}, \qquad x_k = 1 + \frac{2k}{n}$$

Etiquetando con el extremo inferior de los subintervalos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x &= \sum_{k=0}^{n-1} 4\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} &= \frac{8}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1+\frac{2k}{n} \\
&= \frac{8}{n}\left[n+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\right] &= 8+\frac{8(n-1)}{n}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} 8+\frac{8(n-1)}{n} = 8+8 = 16$$

Etiquetando con el extremo superior de los subintervalos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x &= \sum_{k=1}^{n} 4\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n} &= \frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n} 1+\frac{2k}{n} \\
&= \frac{8}{n}\left[n+\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] &= 8+\frac{8(n+1)}{n}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} 8+\frac{8(n+1)}{n} = 8+8 = 16$$

2. Resuelva el problema de valores iniciales (7 puntos)

$$\begin{cases} f''(x) = \dfrac{4}{x^2} \\ f'(1) = 1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

Para encontrar $f'(x)$ integramos $f''(x)$:

$$f'(x) = \int \frac{4}{x^2} dx = \int 4x^{-2} dx = 4\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{-4}{x} + C$$

Ahora, utilizamos la condición sobre f' para encontrar la constante C:

$$f'(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad -4 + C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

Por lo tanto, $f'(x) = \dfrac{-4}{x} + 5$. Realizamos un procedimiento análogo para encontrar f:

$$f(x) = \int \frac{-4}{x} + 5dx = -4\ln|x| + 5x + D$$

Finalmente despejamos D con la condición inicial:

$$f(-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad -4\ln|-1| - 5 + D = 3 \quad \Rightarrow \quad D = 8$$

Concluimos que la solución es $f(x) = -4\ln|x| + 5x + 8$.

3. Calcule las siguientes integrales. No es necesario simplificar el resultado.

A) $\displaystyle\int \frac{2e^{-x}+e^{2x}}{e^x}\,dx$ (8 puntos)

$$\begin{aligned}\int \frac{2e^{-x}+e^{2x}}{e^x}\,dx &= \int \frac{2e^{-x}}{e^x}\,dx + \int \frac{e^{2x}}{e^x}\,dx\\ &= \int 2e^{-2x}\,dx + \int e^x\,dx\\ &= \int 2e^{-2x}\,dx + e^x + C\end{aligned}$$

En la integral de $2e^{-2x}$ realizamos el cambio $u = -2xdx$, con lo que $du = -2dx$. Así,

$$\int 2e^{-2x}\,dx = \int -e^u\,du = -e^u + C = -e^{-2x} + C$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{2e^{-x}+e^{2x}}{e^x}\,dx = -e^{-2x} + e^x + C$$

B) $\displaystyle\int_2^3 2x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$ (10 puntos)

Con el cambio de variable $u = x^2-1$, se tiene $du = 2xdx$. Por otro lado, $x^2 = u+1$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_2^3 2x^3\sqrt{x^2-1}\,dx &= \int_2^3 2x \cdot x^2 \cdot \sqrt{x^2-1}\,dx \\
&= \int_3^8 (u+1)\sqrt{u}du \\
&= \int_3^8 u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}du \\
&= \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_3^8 \\
&= \left(\frac{8^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{8^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{3^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \left(\frac{2\cdot 8^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2\cdot 8^{\frac{3}{2}}}{3}\right) - \left(\frac{2\cdot 3^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2\cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3}\right)
\end{aligned}$$

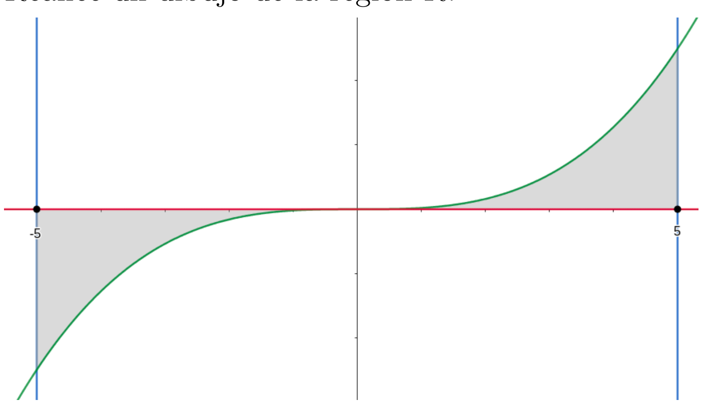
C) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-7}dx$ (6 puntos)

Con el cambio de variable $u = x^3+3x-7$, se tiene $du = (3x^2+3)dx$, con lo que $\frac{1}{3}du = (x^2+1)dx$. Así,

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-7}dx \;=\; \int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{u}du \;=\; \frac{1}{3}\ln|u|+C \;=\; \frac{1}{3}\ln|x^3+3x-7|+C$$

4. Sea R la región del plano cartesiano delimitada por las curvas $y = x^3$, $y = 0$, $x+5=0$ y $x-5=0$.

A) Realice un dibujo de la región R. (3 puntos)



B) Calcule el área de la región R. (6 puntos)

El área está dada en dos trozos:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-5}^{0} -x^3 dx + \int_{0}^{5} x^3 dx \\ &= \left.\frac{-x^4}{4}\right|_{-5}^{0} + \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{5} \\ &= \frac{-0^4}{4} - \frac{(-5)^4}{4} + \frac{5^4}{4} - \frac{0^4}{4} \\ &= \frac{625}{2}. \end{aligned}$$

C) Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región R en torno al eje x. (5 puntos)

Utilizando la fórmula del método de discos tenemos:

$$V = \pi \int_{-5}^{5} (x^3)^2 dx = \pi \int_{-5}^{5} x^6 dx = \pi \left(\left.\frac{x^7}{7}\right|_{-5}^{5} \right) = \pi \left(\frac{(5)^7}{7} - \frac{(-5)^7}{7} \right) = \frac{156\,250\pi}{7}$$