UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

MATEM
Matemática Para la Enseñanza Media

Cálculo

III Examen Parcial 2022

Sábado 17 de setiembre

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.

2. Este examen consta de 2 partes y un total de 50 puntos: respuesta corta (3 puntos) y desarrollo (47 puntos).

3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.

4. La prueba debe resolverse individualmente.

5. **Anote en su cuaderno de examen las respuestas de las 2 partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible.

6. En los **ítems de respuesta corta**, usted deberá indicar en el cuaderno de examen el número de ítem e indicar respuesta que considera correcta de acuerdo a lo que se solicita. Sólo se calificará la respuesta indicada que se encuentre escrita en el cuaderno de examen.

7. Para responder la parte de desarrollo debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.

8. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Respuesta Corta

Determine lo que se le solicita a continuación. Un punto por cada respuesta correcta (3 puntos)

Suponga que g es integrable en $[-1, 2\pi]$. Si:

$$\int_0^{-1} g(x)dx = 3 \qquad \int_{2\pi}^{3} g(x)dx = -4 \qquad \int_{-1}^{2\pi} g(x)dx = 9$$

Determine el valor de las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)dx =$ __________

ii) $\displaystyle 2\int_{-1}^{3} g(x)dx =$__________

iii) $\displaystyle\int_{0}^{3} g(x)dx =$ __________

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Sea $h(x) = \displaystyle\int_1^{\cos(x)} te^t \, dt$. Determine $h'(x)$. (3 puntos)

2. Utilice sumas de Riemann para demostrar que $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2 + x\right) dx = \frac{14}{3}$ (8 puntos)

3. Determine el criterio de una función $f(x)$ definida en su dominio máximo y que satisface las siguientes condiciones:

$$f'(x) = \frac{10x^2 - 1}{x^2} \qquad f(1) = 13$$

(6 puntos)

4. Calcule las siguientes integrales. En el caso de las integrales definidas determine el valor exacto.

   A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx$ (6 puntos)

   B) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)} dx$ (5 puntos)

   C) $\displaystyle\int x^3 \sqrt{x^2+1} dx$ (7 puntos)

5. Considere la región R_1 acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

   A) Realice un bosquejo de la región R_1. (2 puntos)

   B) Calcule el área de R_1. (4 puntos)

   C) Determine el volumen del sólido generado al girar R_1 en torno al eje x. (6 puntos)

Fin del examen

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

Proyecto MATEM-Cálculo

III Examen Parcial 2022- Solucionario

I parte: Respuesta Corta

Determine lo que se le solicita a continuación. Un punto por cada respuesta correcta (3 puntos)

Suponga que g es integrable en $[-1, 2\pi]$. Si:

$$\int_0^{-1} g(x)dx = 3 \qquad \int_{2\pi}^{3} g(x)dx = -4 \qquad \int_{-1}^{2\pi} g(x)dx = 9$$

Determine el valor de las siguientes integrales

i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)dx = \underline{-3}$ ii) $\displaystyle 2\int_{-1}^{3} g(x)dx = \underline{10}$ iii) $\displaystyle\int_{0}^{3} g(x)dx = \underline{8}$

II parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Sea $h(x) = \displaystyle\int_1^{\cos(x)} te^t\, dt$. Determine $h'(x)$. (3 puntos)

Solución:

$$h'(x) = \cos(x)e^{\cos(x)} \cdot -\operatorname{sen}(x) - \quad 0 \quad = -\operatorname{sen}(x)\cos(x)e^{\cos(x)}$$

2. Utilice sumas de Riemann para demostrar que $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+x\right)dx = \frac{14}{3}$ (8 puntos)

Solución:

$$\triangle x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = 0 + \frac{2}{n}\cdot i = \frac{2}{n}i$$

$$f(x_i) = \left(\frac{2}{n}i\right)^2 + \frac{2}{n}i = \frac{4}{n^2}i^2 + \frac{2}{n}i$$

$$\triangle x \cdot f(x_i) = \frac{2}{n}\left(\frac{4}{n^2}i^2 + \frac{2}{n}i\right) = \frac{8}{n^3}i^2 + \frac{4}{n^2}i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\triangle x \cdot f(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{8}{n^3}i^2 + \frac{4}{n^2}i\right) = \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{4}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + \frac{2(n+1)}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\triangle x \cdot f(x_i)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} + \frac{2(n+1)}{n}\right) = \frac{8}{3}+2 = \frac{14}{3}$$

3. Determine el criterio de una función $f(x)$ definida en su dominio máximo y que satisface las siguientes condiciones:

$$f'(x) = \frac{10x^2 - 1}{x^2} \qquad f(1) = 13$$

(6 puntos)

Solución:

$$f(x) = \int \frac{10x^2 - 1}{x^2}\, dx$$

$$\int \left(10 - x^{-2}\right) dx$$

$$f(x) = 10x - \frac{x^{-1}}{-1} + C = 10x + \frac{1}{x} + C$$

Si $f(1) = 13$, entonces:

$$10 \cdot 1 + \frac{1}{1} + C = 13$$

$$C = 2$$

Criterio de la función: $f(x) = 10x + \dfrac{1}{x} + 2$

4. Calcule las siguientes integrales. En el caso de las integrales definidas determine el valor exacto.

A) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |e^x - 1|\, dx$ (6 puntos)

Solución:

$$= \int_{-1}^{0} (-e^x + 1)\, dx + \int_{0}^{1} (e^x - 1)\, dx$$

$$= \left. (-e^x + x)\right|_{-1}^{0} + \left. (e^x - x)\right|_{0}^{1} dx$$

$$= (-e^0 + 0) - (-e^{-1} + -1) + (e^1 - 1) - (e^0 - 0)$$

$$= e^{-1} + e - 2$$

B) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)} dx$ (5 puntos)

Solución:

Sustitución: $\begin{aligned} u &= \ln(x) \\ du &= \frac{1}{x}\, dx \end{aligned}$

$$= \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln|u| + C$$

$$= \ln|\ln(x)| + C$$

C) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$ (7 puntos)

Solución:

Sustitución: $\begin{array}{rcl} u = x^2+1 & \rightarrow & u-1 = x^2 \\ du = 2x\,dx & \rightarrow & \dfrac{du}{2} = x\,dx \end{array}$

$$= \int (u-1)\cdot u^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C$$

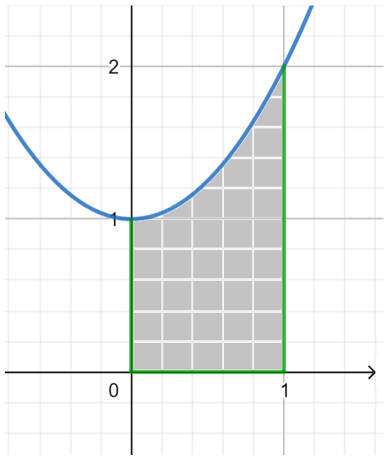
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + C$$

Otra opción:

$$= \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

5. Considere la región R_1 acotada por las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

A) Realice un bosquejo de la región R_1. (2 puntos)



B) Calcule el área de R_1. (4 puntos)

Solución:

$$\int_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{3} + 1 - 0 = \frac{4}{3}$$

C) Determine el volumen del sólido generado al girar R_1 en torno al eje x. (6 puntos)

Solución:

$$V = \pi \cdot \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)^2 dx$$
$$= \pi \cdot \int_0^1 \left(x^4 + 2x^2 + 1\right) dx$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2x}{3} + 1 - 0\right) = \frac{28\pi}{15}$$