



## Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática

Proyecto MATEM

<http://matem.emate.ucr.ac.cr/>

tel. (506) 2511-4528

[matem.em@ucr.ac.cr](mailto:matem.em@ucr.ac.cr)



**Nota:** Este documento es solamente una de las varias versiones aplicadas del tercer examen parcial.



UNIVERSIDAD DE  
COSTA RICA

Universidad de Costa Rica  
Escuela de Matemática  
Proyecto MATEM

<http://matem.emate.ucr.ac.cr>

tel. (506) 2511-4528

matem.em@ucr.ac.cr

**MATEM**

Matemática Para la Enseñanza Media



## Cálculo

### Instrucciones para el III parcial 2021

- 1) Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
- 2) Este examen consta un total de 40 puntos los cuales se distribuyen en selección única (20 puntos), identifique (7 puntos) y desarrollo (13 puntos).
- 3) La prueba está **disponible del sábado 18 de setiembre del 2021 a las 8:00 a.m. hasta las 11:15 p.m.**, en ese intervalo de tiempo deberá resolverlo y enviarlo para su calificación.
- 4) En caso de **dudas** con respecto a algún ítem del examen, el estudiante deberá enviar un correo con las dudas al correo: **calculomatemucr@gmail.com** y el asunto del correo debe ser "Duda examen cálculo". Además, debe **identificarse** con su **nombre completo y código de estudiante**. Durante la prueba solamente se atenderán preguntas de carácter administrativo.
- 5) En caso de inconvenientes de fuerza mayor que afecten el desarrollo del examen del estudiante, debe de comunicarse con su profesor encargado para que haga el reporte debido a la coordinación MATEM para que valore la situación e indique las acciones a seguir.
- 6) La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 3 horas, sin embargo, se habilitará en la plataforma durante 3 horas y 15 minutos. El estudiante debe prepararse con la antelación suficiente antes de la hora establecida para el inicio de la prueba. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
- 7) La plataforma le permite ingresar en varias oportunidades mientras se encuentre dentro del lapso establecido y no haya finalizado la prueba. Tome en cuenta que, para efectos de calificación, sus respuestas no quedarán guardadas a menos que ya haya enviado la prueba para su calificación.
- 8) Para responder la sección de **desarrollo** debe seguir las siguientes indicaciones:
  - a) Contestar en hojas la pregunta en forma clara, ordenada, **a mano**, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. En cada página debe indicar su nombre y apellidos así como el código de estudiante que se le asignó en el proyecto.
  - b) Incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta.

- c) Digitalizar la solución de los ejercicios de modo que el procedimiento aparezca en **un solo archivo pdf** (solamente se aceptará ese formato). Para lograr esto se puede utilizar fotos, escanear o incluso aplicaciones de celular que convierten imágenes a formato pdf. Debe asegurarse de que el archivo sea legible y claro.
  - d) Nombrar el archivo con la información de número de código de estudiante (otorgado por el proyecto MATEM), nombre y Colegio, como se muestra en el siguiente ejemplo: "12345678.FernandoAguilar.ColegioX"
  - e) Subir el archivo pdf en el espacio indicado en el examen (debe verificar que está adjuntado el archivo correcto).
- 9) Cuando esté seguro(a) de sus respuestas debe seleccionar la opción "**terminar intento**" y luego "**enviar todo y terminar**" para que dichas respuestas sean debidamente consignadas en el sistema. Después de esto no podrá realizar cambios. En caso de no seleccionar esta opción, su calificación será cero.
- 10) El sistema califica automáticamente la parte de selección única e identifica, mientras que la parte de desarrollo es revisada y calificada posteriormente. Debido a lo anterior, el sistema le indicará que su examen está incompleto a pesar de que usted lo haya terminado.
- 11) **El trabajo debe realizarse de manera individual**. Se asume que usted actuará con total honestidad, **sin utilizar recursos no permitidos** durante la prueba como aplicaciones de celular, páginas de internet, libros y materiales del curso, además de consultar a otras personas que le ayuden a resolver los ejercicios de la prueba. En caso contrario se le anulará la prueba.
- 12) **No se permite la divulgación de preguntas por medio de grupos de WhatsApp, redes sociales o similares.**
- 13) Se le recomienda finalizar el examen con suficiente tiempo de anticipación a la hora de cierre de la prueba (indicada anteriormente) por si se dieran inconvenientes.

Nota: Los resultados de esta prueba estarán disponibles a partir del lunes 4 de octubre a las 4 pm aproximadamente.

**Pregunta 1**

Sin contestar

Puntaje de 13.00

Resuelva los dos ejercicios que se le indican a continuación.

1) (7 puntos) Hallar la función  $y=f(x)$  que satisface las siguientes condiciones:

$$f(0) = 2 \quad f'(x) = \frac{a}{\sqrt{ax}(\sqrt{ax} + b)^{\frac{1}{2}}}$$

con  $a$  y  $b$  unas constantes positivas.

2) (6 puntos) Determine el volumen de un sólido de revolución generado al hacer girar la región acotada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 0$  y  $x = 4$  en torno al eje  $y$ .

Nota aclaratoria: considere  $y = \sqrt{x}$  y  $x \in [0, 4]$ , utilice el método de discos.

Para responder la sección de **desarrollo debe** seguir las siguientes indicaciones:

- Contestar en hojas la pregunta en forma clara, ordenada, **a mano, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra**. En cada página debe indicar su nombre y apellidos así como el código de estudiante que se le asignó en el proyecto.
- Incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta.
- Digitalizar la solución de los ejercicios de modo que el procedimiento aparezca en **un solo archivo pdf** (solamente se aceptará ese formato). Para lograr esto se puede utilizar fotos, escanear o incluso aplicaciones de celular que convierten imágenes a formato pdf. Debe asegurarse de que el archivo sea legible y claro.
- Nombrar el archivo** con la información de número de código de estudiante (otorgado por el proyecto MATEM), nombre y Colegio, como se muestra en el siguiente ejemplo:  
"12345678.FernandoAguilar.ColegioX"
- Subir el archivo pdf en el espacio indicado en el examen (debe verificar que está adjuntado el archivo correcto).

1. (7 puntos) Hallar la función  $y = f(x)$  que satisface las siguientes condiciones:

$$f(0) = 2 \quad f'(x) = \frac{a}{\sqrt{ax}(\sqrt{ax} + b)^{\frac{1}{2}}}$$

con  $a$  y  $b$  unas constantes positivas.

### Solución

Sustitución:

$$u = \sqrt{ax} + b$$

$$du = \frac{a}{2\sqrt{ax}} dx \quad \rightarrow \quad 2du = \frac{a}{\sqrt{ax}} dx$$

Reescritura y cálculo de la primitiva:

$$f(x) = \int \frac{a}{\sqrt{ax}(\sqrt{ax} + b)^{\frac{1}{2}}} dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{2}{u^{\frac{1}{2}}} du = 2 \int u^{-\frac{1}{2}} du = 4u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$\rightarrow 4(\sqrt{ax} + b)^{\frac{1}{2}} + C$$

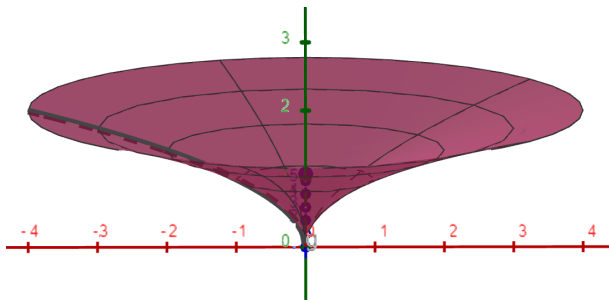
Valor de la constante:

$$\text{Si } f(0) = 4(\sqrt{a \cdot 0} + b)^{\frac{1}{2}} + C = 2 \quad \rightarrow \quad C = 2 - 4\sqrt{b}$$

Criterio de la función:

$$f(x) = 4(\sqrt{ax} + b)^{\frac{1}{2}} + 2 - 4\sqrt{b}$$

2. (6 puntos) Determine el volumen de un sólido de revolución generado al hacer girar la región acotada por  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 0$  y  $x = 4$  en torno al eje  $y$ .



### Solución

Datos:

Criterio  $y = \sqrt{x} \implies x = y^2$  (radio del disco)

Intervalo de integración  $x \in [0, 4] \implies y \in [0, 2]$

Cálculo del volúmen:

Si  $V = \pi \cdot \int_a^b [R(y)]^2 dy$ , entonces,

$$V = \pi \cdot \int_0^2 [y^2]^2 dy = \pi \cdot \int_0^2 y^4 dy = \pi \cdot \left. \frac{y^5}{5} \right|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

**Nota:** A los estudiantes que interpretaron este problemas con el método de arandelas, se les calificó en base al procedimiento que realizaron.


Pregunta 2

Sin contestar


Puntaje de 7.00

Analice las siguientes proposiciones y determine si son falsas o verdaderas.

$$\int 0 dx = 0$$

Elegir... 

$$\int (k + f(x)) dx = k + \int f(x) dx, \text{ para todo } k \in \mathbb{R}$$

Elegir... 

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ para todo } n \in \mathbb{R}$$

Elegir... 

Sea  $f(x) = a^x$  una función exponencial bien definida en su dominio máximo, entonces  $\int f(x) dx = \frac{a^x}{\ln(x)} + C$

Elegir... 

$$\int dx = x + C$$


Elegir... 

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \text{ con } f(x) \neq 0$$

Elegir... 

$\int k \cdot (f(x) + g(x)) dx = k \cdot \int f(x) dx - k \cdot \int g(x) dx,$   
con  $k$  una constante.

Elegir... 

Su respuesta es incorrecta. 

La respuesta correcta es:  $\int 0 dx = 0$

→ Falso,

$$\int (k + f(x)) dx = k + \int f(x) dx, \text{ para todo } k \in \mathbb{R}$$

→ Falso,  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  para todo  $n \in \mathbb{R}$

→ Falso, Sea  $f(x) = a^x$  una función exponencial bien definida en su dominio máximo, entonces  $\int f(x) dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$

→ Falso,

$$\int dx = x + C$$

→ Verdadero,  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$ , con  $f(x) \neq 0$

→ Verdadero,  $\int k \cdot (f(x) + g(x)) dx = k \cdot \int f(x) dx + k \cdot \int g(x) dx$ , con  $k$  una constante.

→ Falso

^



**Pregunta 3**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Sea  $f$  integrable en  $[a, b]$  y sea  $k \in \mathbb{R}$ .

Considere las siguientes proposiciones:

$$\text{I. } \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{II. } \int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

Seleccione una:

- Solo la II
- Ambas
- Ninguna
- Solo la I

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es: Solo la I

**Pregunta 4**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Sean  $f, g, h$  integrables en  $I = [m, n]$  tal que  $f(x) \geq g(x)$  para todo  $x$  en  $I$ . Considere las siguientes proposiciones:

$$\text{I. } \int_m^n [f(x) + h(x)] dx = \int_m^n f(x) dx + \int_m^n h(x) dx$$

$$\text{II. } \int_m^n f(x) dx \geq \int_m^n g(x) dx$$

Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

Seleccione una:

- Solo la I
- Ambas
- Solo la II
- Ninguna

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es: Ambas

Pregunta 5

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Considere dos funciones  $f$  y  $g$  continuas en  $\mathbb{R}$  para las cuales se cumple que:

$$\int_5^7 f(x)dx = 8$$

$$\int_7^{10} f(x)dx = 9$$

$$\int_{10}^5 g(x)dx = -15$$

$$\int_7^{10} g(x)dx = 8$$

El valor de  $\int_5^{10} (2f(x) + g(x))dx$  corresponde a

Seleccione una:

- 24
- 64
- 49
- 19

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es: 49

**Pregunta 6**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Al calcular la integral  $\int (2t^2 - 1)^2 dt$  se obtiene como resultado

Seleccione una:

- $\frac{4t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} + C$
- $\frac{4t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + t + C$
- $-\frac{4t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + t + C$
- $-\frac{4t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} + C$

La respuesta correcta es:  $\frac{4t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + t + C$

**Pregunta 7**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

La solución general de la siguiente integral

$$\int \frac{2x + 3}{2\sqrt{x}} dx$$

corresponde a:

Seleccione una:

- $\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} + C$
- $\sqrt{x} + \frac{3x}{2} + C$
- $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3\sqrt{x} + C$
- $\ln|\sqrt{x}| + \frac{3\sqrt{x}}{2} + C$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3\sqrt{x} + C$ **Pregunta 8**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Sea  $f$  una función que cumple que  $f(x) = \int (x^5 + 1)dx$  y  $f(-1) = 3$ , entonces el criterio de  $f(x)$  corresponde a

Seleccione una:

- $f(x) = \frac{x^6}{6} + x + 3$
- $f(x) = -\frac{x^6}{6} + x + \frac{25}{6}$
- $f(x) = \frac{x^6}{6} + x + \frac{23}{6}$
- $f(x) = \frac{x^6}{6} - x + \frac{13}{6}$

La respuesta correcta es:  $f(x) = \frac{x^6}{6} + x + \frac{23}{6}$  ^

Pregunta 9

Sin contestar

Puntaje de 1.00

El valor, en función de  $x$ , de la siguiente integral definida:

$$\int_0^x (3 + \sqrt{2})^t dt$$

corresponde a

Seleccione una:

$\frac{(3 + \sqrt{2})^{x+1} - (3 + \sqrt{2})}{x + 1}$

$\frac{(3 + \sqrt{2})^x - 1}{\ln(3 + \sqrt{2})}$

$\frac{(3 + \sqrt{2})^x}{\ln(3 + \sqrt{2})}$

$\frac{3^x}{\ln(3)} + \frac{(\sqrt{2})^x}{\ln(\sqrt{2})}$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $\frac{(3 + \sqrt{2})^x - 1}{\ln(3 + \sqrt{2})}$

**Pregunta 10**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

El valor de la integral  $\int_{-1}^1 (t^2 - 2)dt$  es

Seleccione una:

$\frac{-10}{3}$

$\frac{10}{3}$

$\frac{-3}{10}$

$\frac{3}{10}$

La respuesta correcta es:  $\frac{-10}{3}$

**Pregunta 11**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

El valor de  $\int_{-1}^2 a |x| dx$ , con  $a$  una constante real, corresponde a

Seleccione una:

$\frac{3a}{2}$

$\frac{-5a}{2}$

$\frac{-3a}{2}$

$\frac{5a}{2}$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $\frac{5a}{2}$

**Pregunta 12**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Sea  $g(x)$  una función definida en su dominio máximo y derivable con

$$\text{criterio } g(x) = \int_{-2x}^{2x^2} te^{t^2} dt.$$

Entonces, el criterio de la derivada de  $g$  corresponde a

Seleccione una:

- $g'(x) = 8x^3 e^{4x^4} - 4xe^{-4x^2}$
- $g'(x) = 8x^3 e^{4x^4} + 4xe^{4x^2}$
- $g'(x) = 2x^2 e^{4x^4} + 2xe^{4x^2}$
- $g'(x) = 8x^3 e^{4x^4} - 4xe^{4x^2}$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $g'(x) = 8x^3 e^{4x^4} - 4xe^{4x^2}$

**Pregunta 13**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Sea  $g(x)$  definida mediante  $g(x) = -x^2 + \int_{-3x}^{2x^2} t^3 dt$ . Entonces, la derivada de  $g$ ,  $g'(-3)$  corresponde a

Seleccione una:

- 67806
- 67791
- 6552
- 6567

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es: -67791



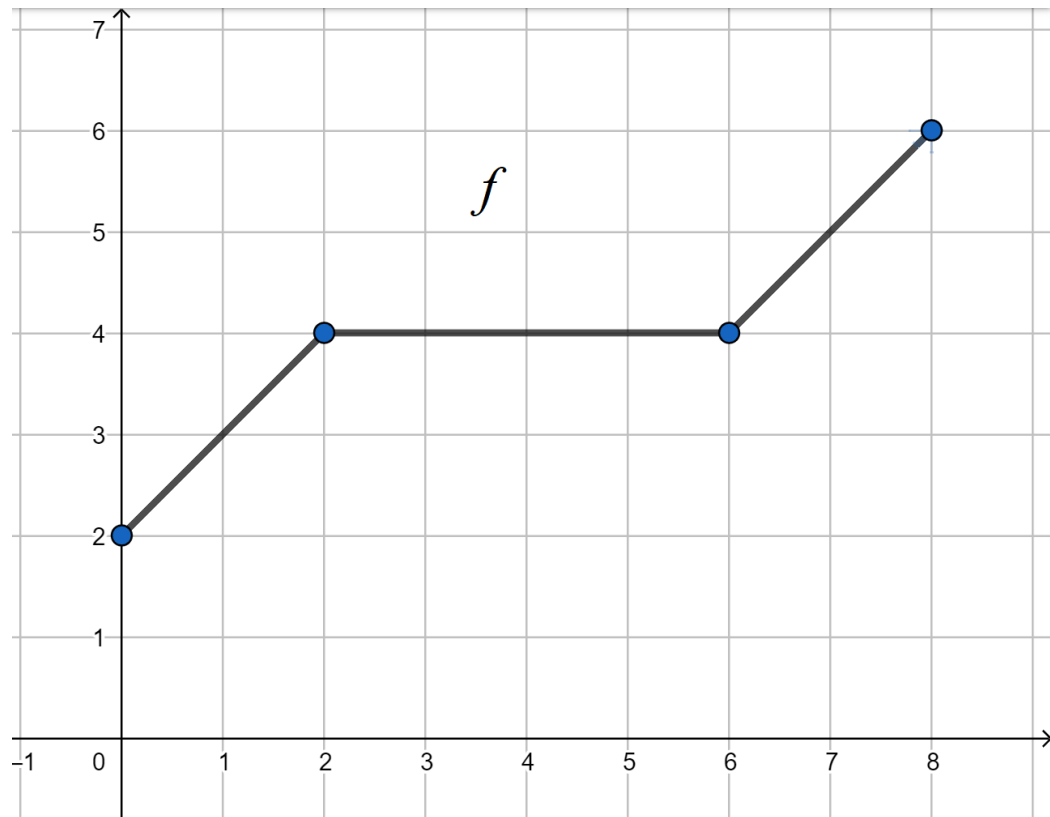
Pregunta 14

Sin contestar

Puntaje de 2.00

Considere la función  $f$  cuya gráfica se muestra a continuación y

$$A(x) = \int_0^x f(t) dt.$$



Con base a dicha información, determine lo que se le solicita.

El valor de  $A(6)$  corresponde a :

- 4       22       47/2       24

Puntúa 0.00 sobre 1.00

La respuesta correcta es: 22

El valor de  $A'(1)$  corresponde a :

- 0       1       5/2       3

Puntúa 0.00 sobre 1.00

La respuesta correcta es: 3

# La pregunta 15 fue anulada, por lo que no tiene puntaje asignado

## Pregunta 15

Sin contestar

No calificada

La sustitución elemental más adecuada para resolver la siguiente integral:

$$\int x^2 \sqrt{x+1} dx$$

corresponde a

Seleccione una:

- $u = \sqrt{x-1}$
- $u = x^2$
- $u = x + 1$
- $u = x$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $u = x + 1$

## Pregunta 16

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Observe a continuación la solución parcial de la integral

$$\int x \cdot e^{x^2} dx$$
$$= \frac{e^{x^2}}{\clubsuit} + C$$

El símbolo  $\clubsuit$  corresponde a la expresión:

Seleccione una:

- 1
- 2
- $\frac{1}{2}$
- $x$

La respuesta correcta es: 2

**Pregunta 17**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Para resolver la integral  $\int_4^9 g(1 - \sqrt{x}) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$  se utiliza la sustitución  $s = 1 - \sqrt{x}$  y algunas propiedades de integrales, se obtiene la integral  $\int_a^b g(s)ds$ . Los valores  $a$  y  $b$  corresponden a:

Seleccione una:

- $a = 3$  y  $b = 4$
- $a = 4$  y  $b = 3$
- $a = -1$  y  $b = -2$
- $a = -2$  y  $b = -1$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $a = -2$  y  $b = -1$

**Pregunta 18**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Sea  $f(x)$  una función continua. Al realizar la sustitución  $u = x^2$  en la siguiente integral:

$$\int_4^9 x f(x^2) dx$$

La integral se transforma en

Seleccione una:

- $\int_2^3 \sqrt{u} f(u) du$
- $\frac{1}{2} \int_4^9 f(u) du$
- $2 \int_{16}^{81} f(u) du$
- $\frac{1}{2} \int_{16}^{81} f(u) du$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $\frac{1}{2} \int_{16}^{81} f(u) du$

**Pregunta 19**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas y derivables tal que  $f(x) = 2g'(x)$  en el intervalo cerrado  $[a, b]$ , entonces el valor de la integral:

$$\int_a^b g(x)f(x) dx$$

corresponde a

Seleccione una:

- $g^2(b) - g^2(a)$
- $2g(b)f(b) - 2g(a)f(a)$
- $2g(b) - 2g(a)$
- $f^2(b) - f^2(a)$

Su respuesta es incorrecta.

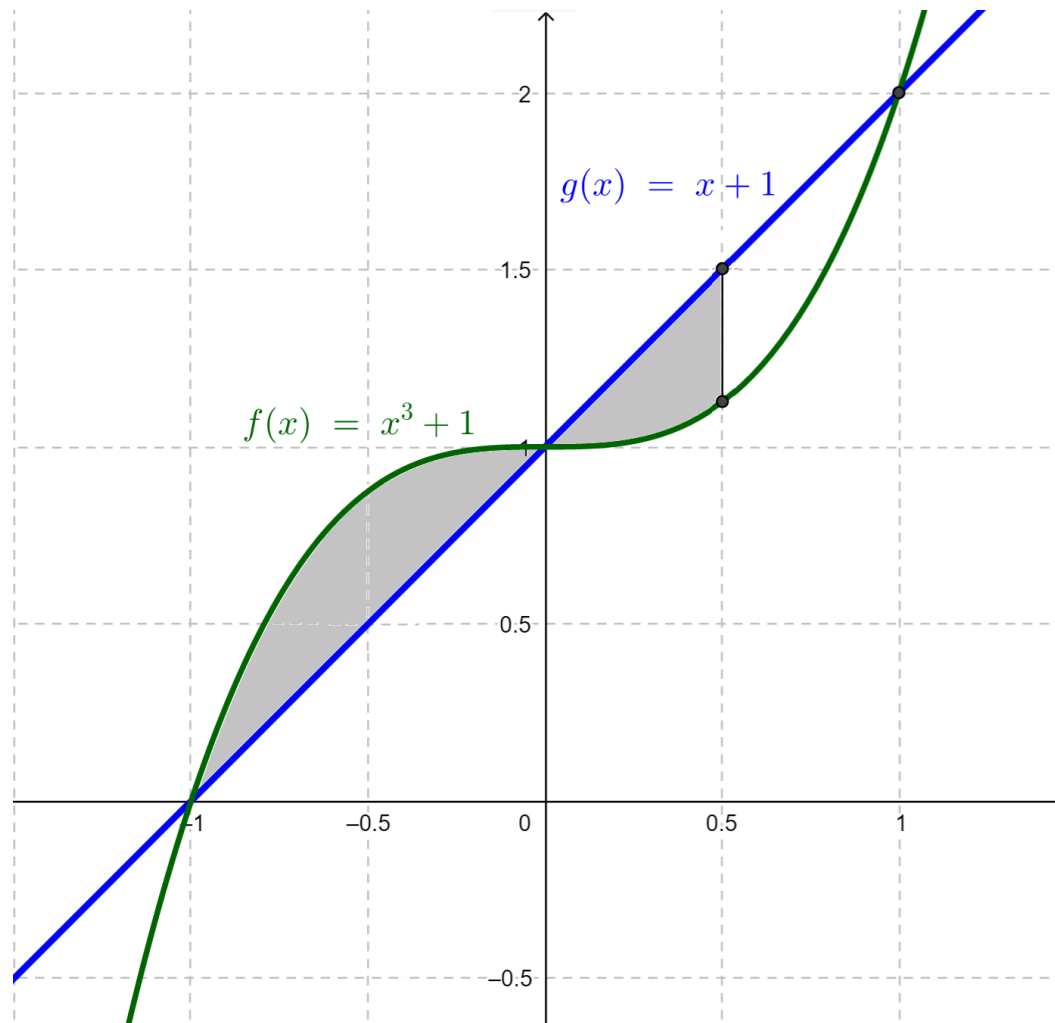
La respuesta correcta es:  $g^2(b) - g^2(a)$

Pregunta 20

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Considere la imagen que aparece a continuación:



La expresión que permite calcular el área de la región sombreada que aparece en la figura corresponde a

Seleccione una:

- $\int_0^1 (x^3 - x) dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (x - x^3) dx$
- $\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (x^3 - x) dx$
- $\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (x - x^3) dx$
- $\int_{-1}^0 (x - x^3) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (x^3 - x) dx$

^

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (x - x^3) dx$

**Pregunta 21**

Sin contestar

Puntaje de 1.00

Considere las curvas:

$$y = 2x + 3$$

Eje  $x$

$$\text{Recta } x = 1$$

$$\text{Recta } x = 4$$

La integral que permite calcular el área de la región comprendida entre las curvas indicadas corresponde a

Seleccione una:

- $\int_4^1 (2x + 3) dx$
- $\int_1^4 (2x + 3) dx$
- $\int_1^4 (x + 3) dx$
- $\int_1^4 (-2x - 3) dx$

Su respuesta es incorrecta.

La respuesta correcta es:  $\int_1^4 (2x + 3) dx$

III Parcial - Reposición y aplicación especial - 23 de setiembre ►

Regresar a: III Parcial ↩