Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

SOLUCIÓN TERCER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I

Valor: 42 puntos. Miércoles 2 de setiembre de 2015

1. Considere las funciones f y h, tales que $f(x)=\int_2^{h(x)} \ln(1+3t)\,dt$ y $h(x)=\dfrac{x}{\pi}+\int_1^{\tan(x)}\left[sen^3\left(\dfrac{t\pi}{2}\right)\right]dt$. De acuerdo con la información, calcule $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(5 puntos)

$$f'(x)=\ln(1+3h(x))\cdot h'(x)$$

$$h'(x)=\frac{1}{\pi}+sen^3\left(\frac{\pi\tan(x)}{2}\right)\cdot\sec^2(x)$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}+\int_1^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}\left[sen^3\left(\frac{t\pi}{2}\right)\right]dt \;=\; \frac{1}{4}+\int_1^{1}\left[sen^3\left(\frac{t\pi}{2}\right)\right]dt \;=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(1+3h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi}+sen^3\left(\frac{\pi\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right)\cdot\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\ln\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}+2\right)$$

2. Utilice sumas de Riemann para demostrar que $\int_a^b x^2\ dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$. *(6 puntos)*

$$\int_a^b x^2\ dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)^2 \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)^2 =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\left(a^2 + 2ai\frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2}i^2\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}a^2 + 2a\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}i + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\left[a^2 n + 2a\frac{b-a}{n}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[(b-a)a^2 + a(b-a)^2\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right] =$$

$$(b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} =$$

$$(b-a)\left[a^2 + a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3}\right] =$$

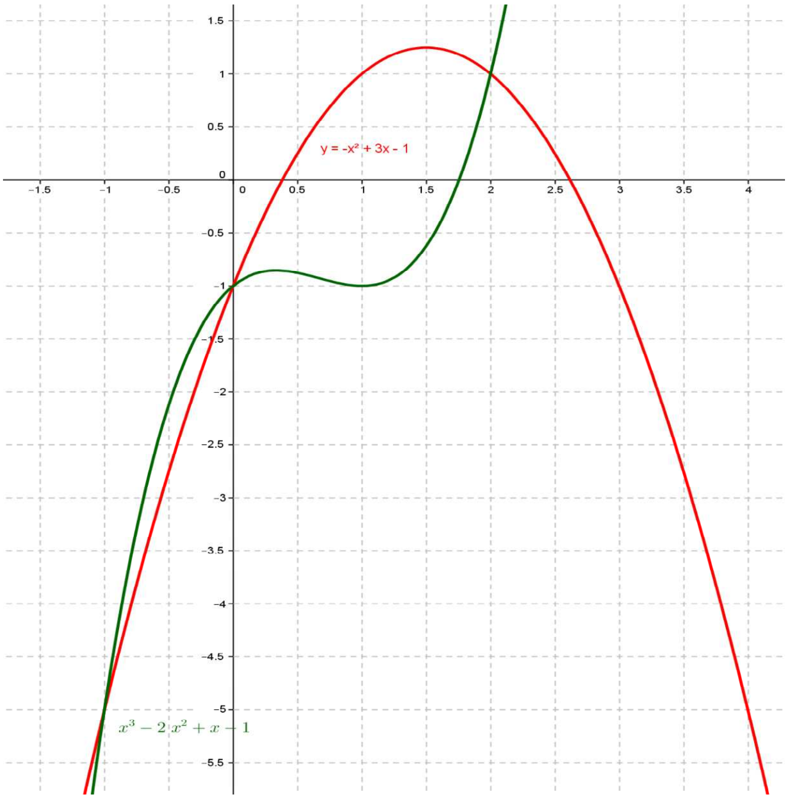
$$(b-a)\left(\frac{ab}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3}\right) =$$

$$\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

3. Considere la región en el plano acotada por $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$ y $y = -x^2 + 3x - 1$.

Defina (mediante integrales de la forma $\int_a^b p(x)\, dx$) su área. No es necesario calcularla.

(5 puntos)



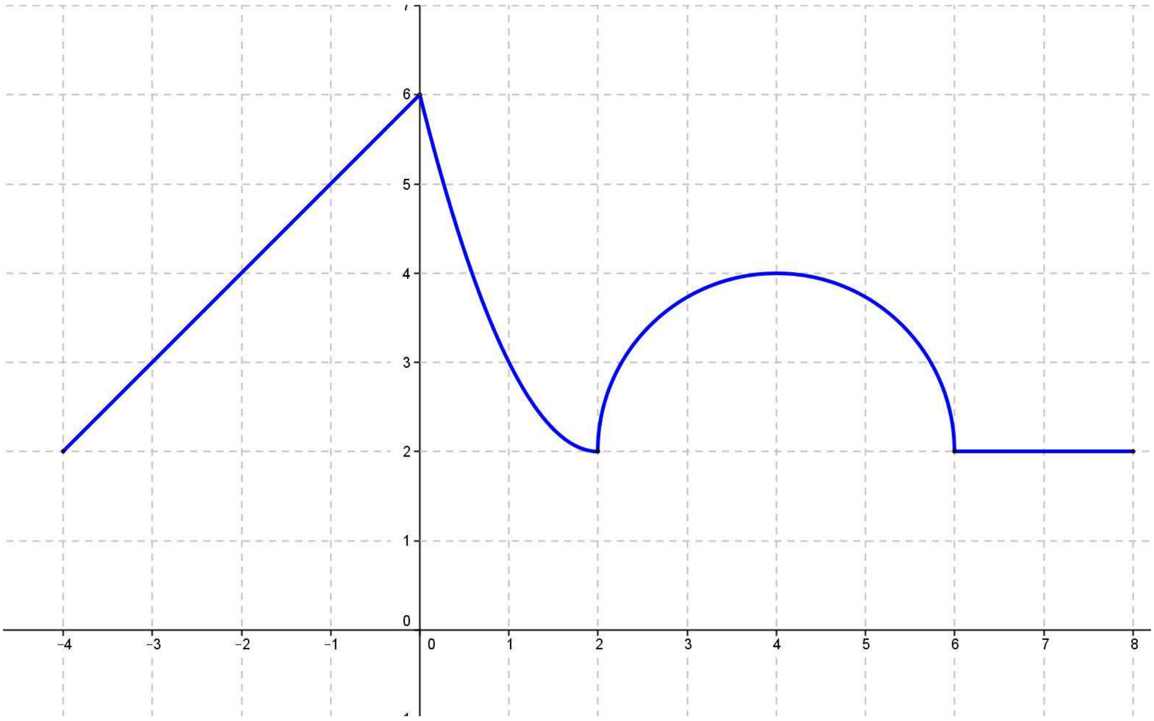
$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = -x^2 + 3x - 1$$
$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -1$$

Hacer tabla de signos para $x(x-2)(x+1)$

Definir las integrales

$$A = \int_{-1}^{0} x^3 - x^2 - 2x\, dx - \int_{0}^{2} x^3 - x^2 - 2x\, dx$$

4. Sea g una función cuyo criterio está dado por $g(x)=\int_{-4+x}^{x} f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra a continuación :



Con base en la información determine el valor exacto de: $g(0)$ y $g(6)$.

(2 puntos cada una)

$g(0)=\int_{-4}^{0} f(t)dt$ = área del triángulo + área del rectángulo = $\dfrac{4\cdot 4}{2}+4\cdot 2=16$

$g(6)=\int_{2}^{6} f(t)dt$ = área de la semicircunferencia + área del rectángulo =

$$\frac{2^2\cdot\pi}{2}+4\cdot 2=2\pi+8$$

5. Calcule las siguientes integrales : *(6, 5 y 5 puntos, respectivamente)*

a) $\int_0^2 \frac{(x-2)}{\sqrt{3x+1}}\,dx$ **b)** $\int_{-2}^2 |2x+1|\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx$

a) $\int_0^2 \frac{(x-2)}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

Sea $y = 3x+1 \Rightarrow dy = 3dx \Rightarrow \frac{dy}{3} = dx$

Cambiar los límites de integración : si $x = 0 \Rightarrow y = 1$ y si $x = 2 \Rightarrow y = 7$.

Definir la integral en términos de la nueva variable $\int_1^7 \frac{\frac{y-1}{3}-2}{\sqrt{y}}\,\frac{dy}{3}$

$$\int_1^7 \frac{\frac{y-1}{3}-2}{\sqrt{y}}\,\frac{dy}{3} =$$

$$\frac{1}{9}\int_1^7 \frac{y-7}{\sqrt{y}}\,dy =$$

$$\frac{1}{9}\int_1^7 (y-7)y^{\frac{-1}{2}}\,dy =$$

$$\frac{1}{9}\int_1^7 y^{\frac{1}{2}} - 7y^{\frac{-1}{2}}\,dy =$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 7\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)_1^7 =$$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{7^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 7\frac{7^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 7\frac{1^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right] = \frac{14\sqrt{7}}{27} - \frac{14\sqrt{7}}{9} - \frac{2}{27} + \frac{14}{9} = -\frac{28\sqrt{7}}{27} + \frac{40}{27}$$

b) $\int_{-2}^{2} |2x+1|\, dx =$

$$-\int_{-2}^{\frac{-1}{2}} 2x+1\, dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{2} 2x+1\, dx =$$

$$-\left(x^2+x\right)_{-2}^{\frac{-1}{2}} + \left(x^2+x\right)_{-\frac{1}{2}}^{2} =$$

$$\frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{35}{4}$$

c) $\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\, dx$

$$\int \frac{1}{1+e^{-2x}} \frac{e^{2x}}{e^{2x}}\, dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx$$

Sea $y = e^{2x}+1 \Rightarrow dy = 2e^{2x}dx \Rightarrow \frac{dy}{2} = e^{2x}dx$

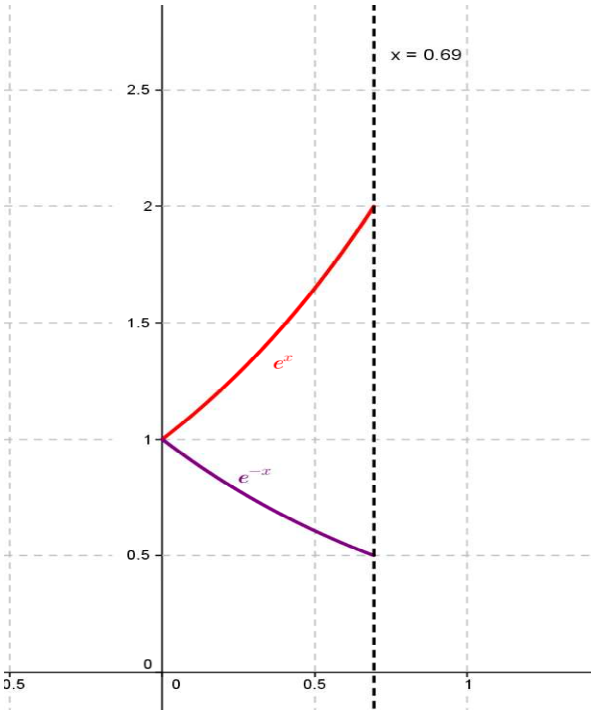
$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\, dy =$$

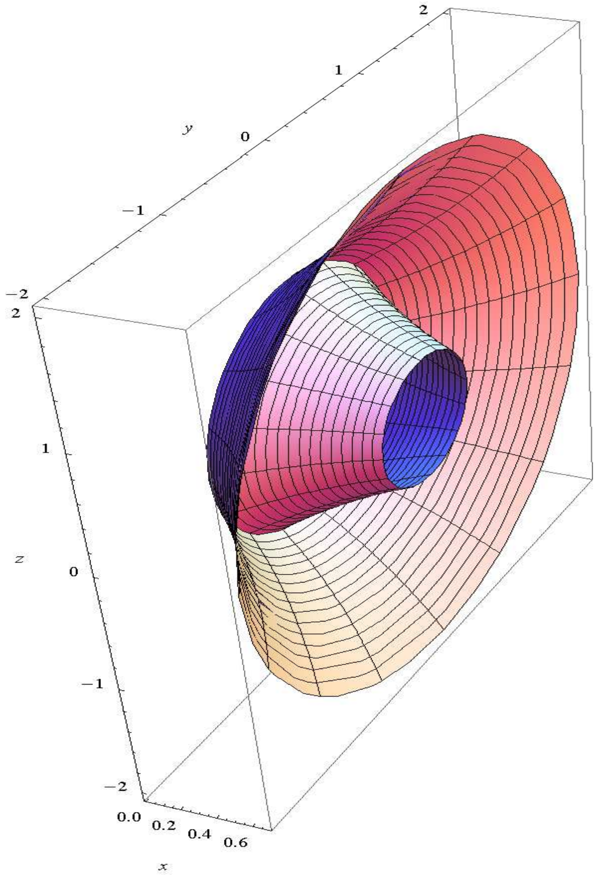
$$\frac{1}{2}\ln(y) + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$$

6. Considere la región acotada por las gráficas de $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y $x = \ln(2)$: *(6 puntos)*

(a) Realice un esbozo del sólido que se genera al hacer girar la región anterior en torno al eje x.





(b) Calcule el volumen del sólido.

$$V = \pi\int_0^{\ln 2} (e^x)^2 - (e^{-x})^2\, dx =$$

$$\pi\int_0^{\ln 2} (e^{2x}) - (e^{-2x})dx =$$

$$\pi\left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\ln 2} =$$

$$\pi\left(\frac{e^{\ln 4}}{2} + \frac{e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}}{2}\right) - \pi\left(\frac{e^0}{2} + \frac{e^0}{2}\right) = \pi\left(2 + \frac{1}{8}\right) - \pi = \frac{9\pi}{8}$$