Cálculo

II Examen Parcial 2022

Sábado 18 de junio

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de 3 partes: selección única (3 puntos), respuesta corta (5 puntos) y la tercera de desarrollo (48 puntos).
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 3 horas. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen las respuestas de las tres partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible.
6. En los **ítems de selección**, usted deberá indicar en el cuaderno de examen el número de ítem e indicar la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Sólo se calificará la opción de respuesta seleccionada que se encuentre escrita en el cuaderno de examen.
7. Para responder la parte de desarrollo debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
8. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Selección única

Escriba en el cuaderno de examen la letra que corresponde a la opción de respuesta que usted considere correcta. (3 puntos, un punto cada respuesta correcta)

Para constestar los ítems* 1*,* 2 *y* 3 *considere la siguiente información:

Sea función f definida en su dominio máximo y con criterio $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, cuyas derivadas $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$ y $f''(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^4}$ cumplen que:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{l}{-\infty \quad -3} & \multicolumn{1}{l}{-1} & \multicolumn{1}{l}{0} & \multicolumn{1}{l}{+\infty} \\
f' & + & - & + & + \\
\hline
f'' & - & - & - & + \\
\hline
\end{array}$$

1. Considere las siguientes proposiciones:

   I. f es creciente en $[1,3]$.

   II. f es decreciente en $]-3,-1[$.

   Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

   A) Ambas

   B) Solo la I

   C) Solo la II

   D) Ninguna

2. Considere las siguientes proposiciones:

   I. f es cóncava hacia abajo en $]-\infty, -1[$.

   II. f es cóncava hacia arriba en $]-1, +\infty[$.

   Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

   A) Ambas

   B) Solo la I

   C) Solo la II

   D) Ninguna

3. Considere las siguientes proposiciones:

   I. f posee un punto máximo relativo en $(-3, 0)$.

   II. f posee un punto de inflexión en $(0, 0)$.

   Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

   A) Ambas

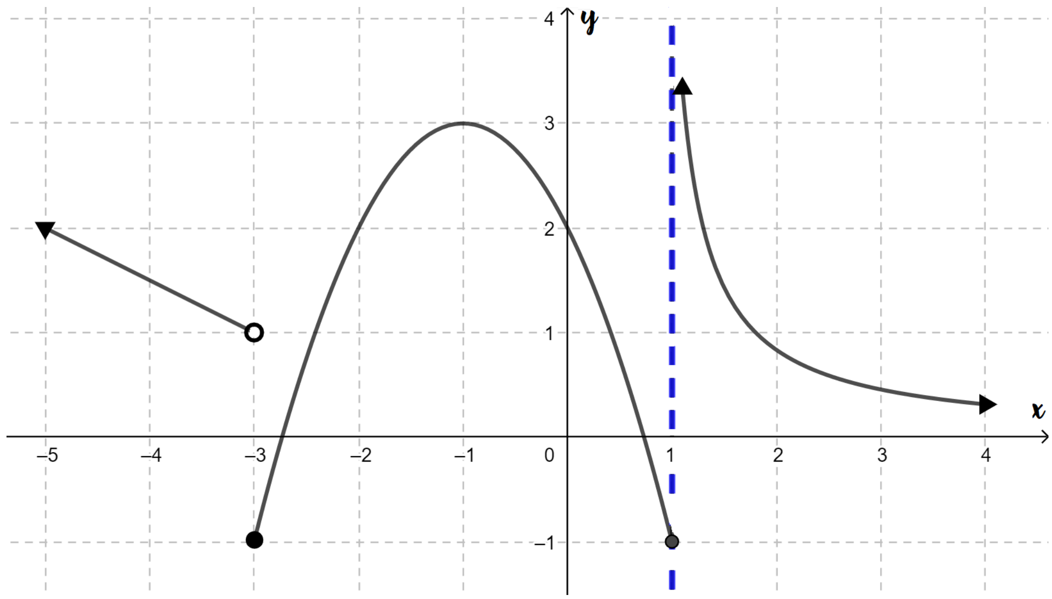
   B) Solo la I

   C) Solo la II

   D) Ninguna

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f, determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. (5 puntos)



1. Un punto mínino absoluto.
2. Un valor de x donde $f'(x) = 0$.
3. Un intervalo donde $f'(x) < 0$.
4. El conjunto solución de $f''(x) > 0$.
5. Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema de Rolle.

III parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule el siguiente límite. Utilice Regla de L'Hôpital. (7 puntos)

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

2. Calcule la derivada de la siguiente función **utilizando derivación logarítmica**. No es necesario simplificar. (10 puntos)

$$y=\left[3x^2-\operatorname{arc}\cos(3)\right]^{\arctan\left(x^6-\log x\right)}$$

3. Calcule el valor del máximo y mínimo absoluto de la función $f(x)=2\tan(x)-\tan^2(x)$ en el intervalo $[0,1]$. (7 puntos)

4. Considere la curva dada por $x+e^{y^2}=e$. Calcule el valor exacto de y'' en el punto donde $x=0$ y $y>0$. (8 puntos)

5. Se desea formar un sólido en el cual se colocan semiesferas en las bases de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de $12\,cm^3$. Determine el radio de la base del cilindro que produce el área mínima de la superficie del sólido. (Indique las unidades de medida) (10 puntos)

6. Un globo meteorológico que se eleva verticalmente es observado desde un punto en el piso a 30 metros del punto que queda directamente debajo del globo. Si el ángulo θ entre el piso y la línea de visión del observador, aumenta a razón de $\dfrac{\pi}{180}$ radianes por segundo. ¿Con qué razón sube el globo cuando $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ radianes? (Indique las unidades de medida) (6 puntos)

Fin del examen

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EMat Escuela de Matemática

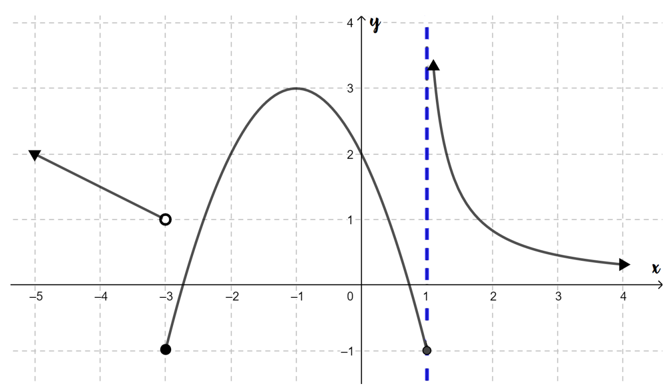
Proyecto MATEM-Cálculo
I Examen Parcial 2022- Solucionario

I parte: Selección única

1. A **2.** B **3.** C

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f, determine lo que se le solicita. (5 puntos)



1. Un punto mínino absoluto: $\underline{(-3,-1) \text{ o } (1,-1)}$
2. Un valor de x donde $f'(x)=0$: $\underline{-1}$
3. Un intervalo donde $f'(x)<0$: $\underline{]-\infty,-3[\,,]-1,1[\,,]1,+\infty[\text{ o cualquier subintervalo}}$
4. El conjunto solución de $f''(x)>0$: $\underline{]1,+\infty[}$
5. Un intervalo $[a,b]$ en el que se cumple el Teorema de Rolle: $\underline{[-3,1] \text{ o } [-2,0]}$

III parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$. Utilice Regla de L'Hôpital. (7 puntos)

Solución

Forma 1

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+2x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{1}} = e^2$$

Forma 2

$y = \lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

$$\to \ln(y) = \lim_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+2x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+2x}}{1} = 2$$

Si $\ln(y) = 2$ entonces $y = e^2$

2. Calcule la derivada de cada la siguiente función utilizando derivación logarítmica. No es necesario simplificar. (10 puntos)

$$\cancel{y=\left[3x^2-\arccos(3)\right]^{\arctan\left(x^6-\log x\right)}} \qquad y=\left[3x^2-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{\arctan\left(x^6-\log x\right)}$$

Solución

Forma 1

$$y=\left[3x^2-\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]^{\arctan\left(x^6-\log x\right)}$$

$$\ln y=\ln\left(\left[3x^2-\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right]^{\arctan\left(x^6-\log x\right)}\right)$$

$$\ln y=\arctan\left(x^6-\log x\right)\cdot\ln\left(3x^2-\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)$$

Derivada

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{1+\left(x^6-\log x\right)^2}\cdot\left(6x^5-\frac{1}{x\ln 10}\right)\cdot\ln\left(3x^2-\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)+\arctan\left(x^6-\log x\right)\cdot\frac{1}{3x^2-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot 6x$$

$$y'=y\left[\frac{1}{1+\left(x^6-\log x\right)^2}\cdot\left(6x^5-\frac{1}{x\ln 10}\right)\cdot\ln\left(3x^2-\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)+\arctan\left(x^6-\log x\right)\cdot\frac{1}{3x^2-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot 6x\right]$$

$$y'=\left[3x^2-\arccos(3)\right]^{\arctan\left(x^6-\log x\right)}\left[\frac{1}{1+\left(x^6-\log x\right)^2}\cdot\left(6x^5-\frac{1}{x\ln 10}\right)\cdot\ln\left(3x^2-\arccos\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)+\arctan\left(x^6-\log x\right)\cdot\frac{1}{3x^2-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)}\cdot 6x\right]$$

Forma 2

$$y = e^{\ln\left[3x^2 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{\arctan\left(x^6 - \log x\right)}}$$

$$y = e^{\arctan\left(x^6 - \log x\right) \cdot \ln\left[3x^2 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right]}$$

Derivada

$$y' = e^{\arctan\left(x^6 - \log x\right) \cdot \ln\left[3x^2 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right]} \cdot \left[\frac{1}{1 + \left(x^6 - \log x\right)^2} \cdot \left(6x^5 - \frac{1}{x \ln 10}\right) \cdot \ln\left(3x^2 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \arctan\left(x^6 - \log x\right) \cdot \frac{1}{3x^2 - \arccos\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot 6x\right]$$

3. Calcule el valor del máximo y mínimo absoluto de la función $f(x) = 2\tan(x) - \tan^2(x)$ en el intervalo $[0, 1]$. (7 puntos)

Solución

$$f'(x) = 2\sec^2(x) - 2\tan(x)\sec^2(x)$$

$2\sec^2(x)\left[1 - \tan(x)\right] = 0$ Nótese que la función secante nunca se hace 0.

$$1 - \tan(x) = 0 \to 1 = \tan(x) \to x = \frac{\pi}{4}$$

$f(0) = 0 \to$ mínimo
$f(1) \approx 0,03$
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \to$ máximo

4. Considere la curva dada por $x+e^{y^2}=e$. Calcule el valor exacto de y'' en el punto donde $x=0$ y $y>0$. (8 puntos)

Solución

Si $x+e^{y^2}=e$ y $x=0$ entonces $0+e^{y^2}=e \to y^2=1 \to y=\pm 1$, solo se considera el positivo.

Primera derivada

$$1+e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'=0 \quad \to \quad y'=\frac{-1}{2y\cdot e^{y^2}} \qquad \textbf{o} \qquad y'=-1\left(2y\cdot e^{y^2}\right)^{-1}$$

Extra $y'|_{(0,1)}=\dfrac{-1}{2e}$

Segunda derivada

$$y''=\frac{0--1\left(2\cdot y'\cdot e^{y^2}+2y\cdot e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'\right)}{\left(2y\cdot e^{y^2}\right)^2}=\frac{2\cdot\dfrac{-1}{2y\cdot e^{y^2}}\cdot e^{y^2}+2y\cdot e^{y^2}\cdot 2y\cdot\dfrac{-1}{2y\cdot e^{y^2}}}{\left(2y\cdot e^{y^2}\right)^2}$$

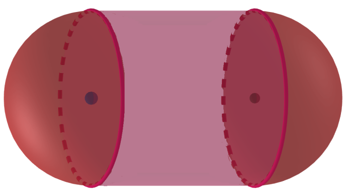
o

$$y''=-1\cdot -1\left(2y\cdot e^{y^2}\right)^{-2}\left(2y'\cdot e^{y^2}+2y\cdot e^{y^2}\cdot 2y\cdot y'\right)$$
$$=\left(2y\cdot e^{y^2}\right)^{-2}\left(2\cdot\frac{-1}{2y\cdot e^{y^2}}\cdot e^{y^2}+2y\cdot e^{y^2}\cdot 2y\cdot\frac{-1}{2y\cdot e^{y^2}}\right)$$

$$y''|_{(0,1)}=\frac{-1-2}{4e^2}=\frac{-3}{4e^2}$$

5. Se desea formar un sólido en el cual se colocan semiesferas en las bases de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de $12\,cm^3$. Determine el radio de la base del cilindro que produce el área mínima de la superficie del sólido. (Indique las unidades de medida) (10 puntos)

Solución



$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 12 \quad \to \quad h = \frac{12}{\pi r^2} - \frac{4}{3}r$$

$$A(r,h) = 2\pi r h + 4\pi r^2 \quad \to \quad A(r) = 2\pi r\left(\frac{12}{\pi r^2} - \frac{4}{3}r\right) + 4\pi r^2 = \frac{24}{r} + \frac{4}{3}\pi r^2$$

$$A'(r) = \frac{-24}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r \quad \to \quad \frac{-24}{r^2} + \frac{8}{3}\pi r = 0 \quad \to \quad \frac{-72 + 8\pi r^3}{3r^2} = 0$$

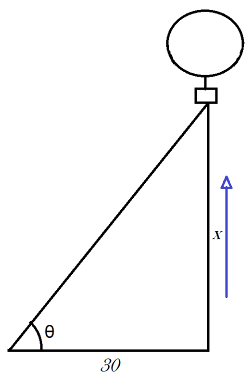
$$\to \quad -72 + 8\pi r^3 = 0 \quad \to \quad r = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$$

Verificación de que el número crítico se asocia a un mínimo (puede ser el criterio de la 1er o 2da derivada)

$$A''\left(\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}\right) > 0$$

El radio que produce el área minima es $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}\,cm \approx 1,42\,cm$

6. Un globo meteorológico que se eleva verticalmente es observado desde un punto en el piso a 30 metros del punto que queda directamente debajo del globo. Si el ángulo θ entre el piso y la línea de visión del observador, aumenta a razón de $\frac{\pi}{180}$ radianes por segundo. ¿Con qué razón sube el globo cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ radianes? (Indique las unidades de medida) (6 puntos)



Datos:

θ indica el ángulo en radianes que varía con el tiempo $\rightarrow$ En algún instante $\theta = \frac{\pi}{4}\, rad$
x indica la altura en metros que varía con el tiempo.
$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{180}\, rad/s$ razón de cambio del ángulo que aumenta.
¿ $\frac{dx}{dt}$?

Procedimientos:

$$\tan(\theta) = \frac{x}{30}$$

Derivada:

$$\sec^2(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{30} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{30} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{3} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad aproximada con que se está elevando el globo en ese instante es de $\frac{\pi}{3}\ m/s$.