Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Proyecto MATEM

Proyecto MATEM: Cálculo I
II Examen Parcial - Solucionario

Total de puntos: 73

I Parte: Respuesta breve

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la gráfica mostrada en la figura 1, correspondiente a la función f. **Escriba en su cuaderno de examen el número de ítem junto con la respectiva respuesta que completa correctamente cada oración. (6 puntos, 1 punto cada respuesta correcta)**

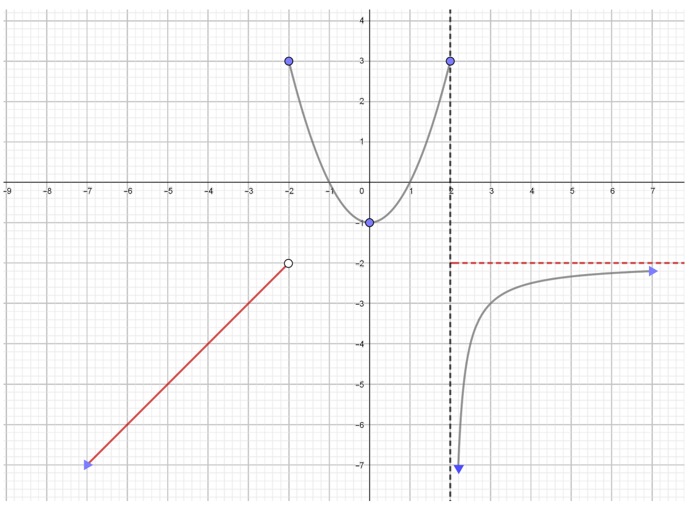


Figura 1: Gráfica de f

1. La ecuación de la asínstota horizontal corresponde a: $y = -2$

2. Un intervalo donde $f'(x) < 0$ corresponde a: $]-2, 0[$

3. Un intervalo donde $f'(x) > 0$ corresponde a: $]-\infty, -2[$ ó $]0, 2[$ ó $]2, +\infty[$

4. El conjunto solución de $f''(x) < 0$ corresponde a: $]2, +\infty[$

5. El valor numérico donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a: 0

6. Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema de Rolle $[-2, 2]$

II Parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen cada una de sus respuestas. **(67 puntos)**

1. Considere la ecuación

$$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$$

Compruebe que la función $f(x) = (3x-5)e^{-2x}$ satisface la ecuación. **(7 puntos)**

$f(x) = (3x-5)e^{-2x}$

$f'(x) = 3e^{-2x} + e^{-2x}(-2)(3x-5) = e^{-2x}[3-6x+10] = e^{-2x}[13-6x]$

$f''(x) = -2e^{-2x}(13-6x) - 6e^{-2x} = e^{-2x}[-26+12x-6] = e^{-2x}[-32+12x]$

Sustituyendo $f'(x)$ y $f''(x)$ en la ecuación $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 0$:

$e^{-2x}[-32+12x] + 4e^{-2x}[13-6x] + 4f(x) = (3x-5)e^{-2x}$

$e^{-2x}[-32+\cancel{12x}+52-\cancel{24x}+\cancel{12x}-20]$

$e^{-2x} \cdot 0 = 0$

$0 = 0$

2. Determine la ecuación de la recta perpendicular a la curva $x^3 + y^3 - 6xy = 10$ en el punto $(3,1)$. **(6 puntos)**

$3x^2 + 3y^2y' - 6y + y'(-6x) = 0$

$y'(3y^2 - 6x) = -3x^2 + 6y$

$y' = \dfrac{-3x^2+6y}{3y^2-6x}$

$y'(3,1) = \dfrac{-3(3)^2+6(1)}{3(1)^2-6(3)} = \dfrac{-27+6}{3-18} = \dfrac{-21}{-15} = \dfrac{7}{5}$

$m_\perp = -\dfrac{5}{7}$

Con $y = m_\perp x + b$ y $(3,1)$:

$b = 1 + \dfrac{15}{7} = \dfrac{22}{7}$

$y_\perp = -\dfrac{5}{7}x + \dfrac{22}{7}$

3. Sea f una función polinomial definida en su máximo dominio, tal que **(4 puntos)**

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + kx^2 - 2$$

Determine el valor de k para que la función f tenga un punto de inflexión en $x = -1$.

$f'(x) = -3x^2 + 4x + 2kx$

$f''(x) = -6x + 4 + 2k = 0$

$\Rightarrow k = 3x - 2 \Rightarrow k = 3(-1) - 2 \Rightarrow k = -5$

4. Determine y'. No es necesario simplificar. **(6 puntos)**

$$f(x) = \frac{\operatorname{arcsen}(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$y = \frac{\operatorname{arcsen}(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$\ln y = \ln\left[\frac{\operatorname{arcsen}(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right]$$

$$\ln y = \ln\left[\operatorname{arcsen}(2x+1)\right] - \ln\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{\operatorname{arcsen}(2x+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot 2x$$

$$y' = \left[\frac{\operatorname{arcsen}(2x+1)}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right] \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{arcsen}(2x+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}} \cdot 2x\right]$$

O bien,

$$y' = \frac{\dfrac{2\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} - \dfrac{2x\operatorname{arcsen}(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

5. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right]$ **(5 puntos)**

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}$ F.I:$\frac{0}{0}$

Aplicando L'Hopital:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x}$ F.I:$\frac{0}{0}$

Aplicando L'Hopital nuevamente:

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{1}{\cancel{x^2}}}{\frac{1+x}{\cancel{x^2}}}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)^{\cos(x)}$ **(5 puntos)**

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)^{\cos(x)}$ F.I:∞^0

Sea $y=\tan(x)^{\cos(x)}$

$\ln y=\cos x\ln\left[\tan(x)\right]=\dfrac{\ln\left[\tan(x)\right]}{\sec(x)}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\ln\left[\tan(x)\right]}{\sec(x)}$ F.I:$\frac{\infty}{\infty}$

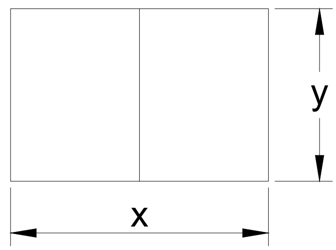
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\frac{1}{\tan(x)}\sec^2(x)}{\sec(x)\tan(x)}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\sec(x)}{\tan^2(x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}=0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}y=e^0=1$

6. Resuelva los siguientes problemas:

(a) Un granjero tiene 100 metros de alambre para cerca, con el cual planea construir dos corrales rectangulares adyacentes, ¿cuáles son las dimensiones que encierran el área máxima? **(5 puntos)**



$3y + 2x = 100 \Rightarrow y = \dfrac{100 - 2x}{3}$

$A = xy$

$A(x) = x\left(\dfrac{100 - 2x}{3}\right) \qquad x \in [0, 50]$

$A(x) = \dfrac{100x - 2x^2}{3}$

$A'(x) = \dfrac{100}{3} - \dfrac{4x}{3} = 0$

$\Rightarrow 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$

$A(0) = 0$

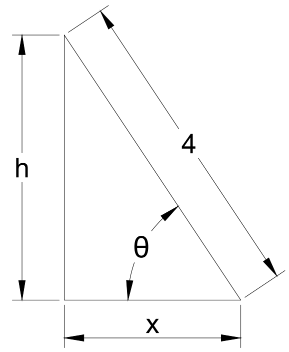
$A(25) = \dfrac{2500 - 250}{3} = \dfrac{1250}{3} = 416,667$

$A(50) = 0$

Con $x = 25 \Rightarrow y = \dfrac{100 - 2 \cdot 25}{3} = 16,667$

Por lo tanto, las dimensiones que encierran el área máxima son $25u.l.$ x $16,667u.l.$

(b) Una escalera de 4 metros se apoya contra un muro y su base se comienza a resbalar. Cuando la base está a $3,7$ metros del muro, la base se aleja a razón de $1,5$ m/s.



Determine la razón de cambio de: **(7 puntos)**
Planteamiento del problema:

Cuando $x = 3,7\text{m} \longrightarrow \dfrac{dx}{dt} = 1,5$ m/s
$h =¿?$ $\theta =¿?$

a. la distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera sobre el muro en ese instante.

$$h^2 + x^2 = 16$$
$$2h\frac{dh}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} = 0$$
$$2(1,52)\frac{dh}{dt} + 2(3,7)(1,5) = 0$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{-2(3,7)(1,5)}{1,52}$$
$$\frac{dh}{dt} = -3,65m/s$$

b. el área del triángulo formado por la escalera, el muro y el suelo en ese instante.

$$A = \frac{xh}{2}$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[h + \frac{dh}{dt}x\right]$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[1,52 + 3,7(-3{,}65)\right]$$
$$\frac{dA}{dt} = -5,613m^2/s$$

c. el ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese instante.

$\cos\theta = \dfrac{x}{4}$

$-\operatorname{sen}\theta \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt}$

$\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

$\dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{4}1,5\dfrac{1}{0,38}$

$\dfrac{d\theta}{dt} = -0,9896 rad/s$

7. Trace la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{(x^2-1)}{x^2-4}$, definida en su dominio máximo, si se sabe que:

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-4)^2} \qquad f''(x) = \frac{18x^2+24}{(x^2-4)^3}$$

(a) Determine el dominio máximo de la función f y los puntos de intersección con los ejes coordenados. **(3 puntos)**

D_f:$\mathbb{R} - \{-2, 2\}$
$\cap_{\text{y}} : (0, \frac{1}{4})$
$\cap_{\text{x}} : (-1, 0), (1, 0)$

(b) Determine la(s) asíntota(s) de la gráfica de la función f y escriba su(s) ecuación(es).

(5 puntos)

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$

$\therefore x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$

$\therefore y = 1$ es una asíntota horizontal.

(c) Determine los intervalos de monotonía y los puntos extremos (donde crece, donde decrece, puntos máximos y mínimos relativos) de la función f. **(3 puntos)**

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
$\therefore x = 0$ es un máximo relativo
$f'(x) > 0$ (creciente) en: $]-\infty, -2[\, \cup\,]-2, 0[$
$f'(x) < 0$ (decreciente) en: $]0, 2[\, \cup\,]2, +\infty[$

(d) Analice la concavidad de la función f y escriba los intervalos correspondientes. Si hay puntos de inflexión, indíquelos. **(3 puntos)**

$f''(x) = 0 \Rightarrow$ no hay puntos de inflexión.
$f''(x) > 0$ (cóncava hacia arriba) en: $]-\infty, -2[\, \cup\,]2, +\infty[$
$f''(x) < 0$ (cóncava hacia abajo) en: $]-2, 2[$

(e) Construya el cuadro de variación de la función f. **(3 puntos)**

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a $+2$	$+2$ a $+\infty$
$f'(x)$	+	+	−	−
$f''(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗∪	↗∩	↘∩	↘∪

(f) Con la información obtenida anteriormente, construya la gráfica de la función f en su máximo dominio. **(3 puntos)**