Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I

Valor: 58 puntos. Tiempo máximo: 3 horas.
Sábado 21 de junio de 2014

INSTRUCCIONES GENERALES

- Antes de contestar lea cuidadosamente las instrucciones y los enunciados de las preguntas.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.

1. Calcule los siguientes límites utilizando la Regla de L´Hopital:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^{(1-x)^{-1}}\right]$

Note que $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x^{(1-x)^{-1}}\right]=1^{\infty}$, entonces se procede de la siguiente manera:

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[x^{(1-x)^{-1}}\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[e^{\ln\left(x^{(1-x)^{-1}}\right)}\right]=e^{\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln\left(x^{(1-x)^{-1}}\right)\right]}$. Ahora calculamos

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln\left(x^{(1-x)^{-1}}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{1}{1-x}\cdot\ln(x)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{\ln(x)}{1-x}\right]=\dfrac{0}{0}$. Por L´Hopital

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{\ln(x)}{1-x}\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}\right]=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{-1}{x}\right]=-1$. Entonces $\lim\limits_{x\to 1}\left[x^{(1-x)^{-1}}\right]=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{3^x}\right)$.

Note que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{3^x}\right)=\frac{\infty}{\infty}$, por L'Hopital se tiene que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x}{3^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3^x\ln 3}\right)$ al evaluar se vuelve a tener la forma $\frac{\infty}{\infty}$, por lo tanto de acuerdo con L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3^x\ln 3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3^x\ln 3\ln 3}\right)=0$$

2. Sea $f:[-1,1]\to \mathbb{R}$, $f(-1)=f(1)$, además f es continua en todo su dominio, ¿se puede asegurar con certeza que $\exists\, c\in\,]-1,1[$ tal que $f'(c)=0$? Justifique y dé un ejemplo. *(5 puntos)*

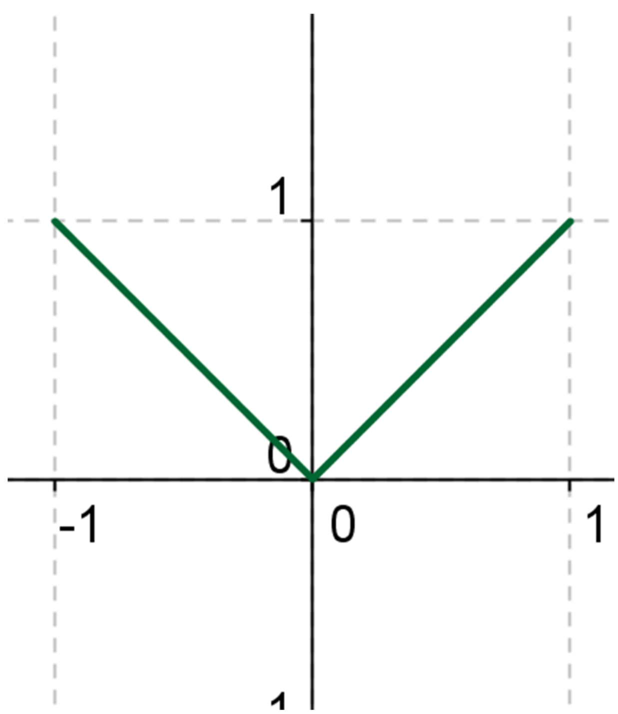
El teorema de Rolle establece que si f es una función que satisface:

- f es continua en $[a,b]$
- f es derivable en $]a,b[$
- $f(a)=f(b)$

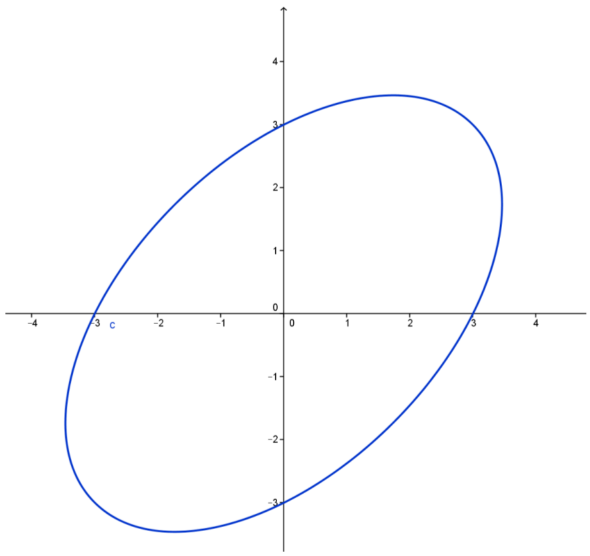
Entonces $\exists\, c\in\,]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

No obstante para la función dada no se asegura que sea derivable en $]-1,1[$, entonces no se puede asegurar que $\exists\, c\in\,]-1,1[$ tal que $f'(c)=0$.

Por ejemplo si $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ y $f(x)=|x|$. Note que $f(-1)=f(1)$ y f es continua en su dominio, no obstante f no es derivable en $x=0$.



3. La curva cuya ecuación está dada por $x^2 - xy + y^2 = 9$ se presenta a continuación



Demuestre que las rectas tangentes a la curva en los puntos de intersección con el eje y son paralelas. (5 puntos)

$$x^2 - xy + y^2 = 9 \Rightarrow$$
$$\left(x^2 - xy + y^2\right)' = (9)' \Rightarrow$$
$$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow$$
$$y'(-x + 2y) = y - 2x \Rightarrow$$
$$y' = \frac{y - 2x}{(-x + 2y)}$$

Luego:

$$y'(0,3) = y'(0,-3) \Rightarrow$$
$$\frac{3 - 2\cdot 0}{-0 + 2\cdot 3} = \frac{-3 - 2\cdot 0}{-0 + 2\cdot -3} \Rightarrow$$
$$\frac{3}{6} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como $y'(0,3)$ y $y'(0,-3)$ definen el valor de las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos donde interseca al eje y, y se probó que $y'(0,3) = y'(0,-3)$, por lo tanto las rectas tangentes a la curva en $(0,3)$ y en $(0,-3)$ son paralelas.

4. Considere una función f tal que $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$, donde $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}$,

$f''(x)=\dfrac{-2x\left(x^2-9\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$. Con base en esta información:

a) Determine el máximo dominio de f.

$D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

b) Halle las coordenadas de los puntos de intersección de la gráfica de f con los ejes.

Intersección con el eje x, $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0\Rightarrow x=0$. Entonces el punto de intersección tiene coordenadas $(0,0)$.

c) Determine la ecuación de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si las hay.

Con base en la información dada se tiene que:

- Las ecuaciones de las asíntotas verticales son: $x=1$ y $x=-1$.
- No hay asíntotas horizontales.
- Como la ecuación de la asíntota oblicua es $y=mx+b$, donde $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}}{x}\right)=0$, entonces se concluye que no hay asíntota oblicua.

d) Determine los intervalos de monotonía. Halle los extremos relativos.

$f'(x)=\dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}$, donde $f'(x)=0\Rightarrow x^2-3=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$ y $f'(x)$ se indefine si $x=\pm 1$, entonces

$-\infty \qquad -\sqrt{3} \qquad -1 \qquad 1 \qquad \sqrt{3} \qquad +\infty$

x^2-3	+	-	-	-	+
$\left(x^2-1\right)^4$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	-	-	-	+

f es creciente en $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]$ y $\left[\sqrt{3},+\infty\right[$.

f es decreciente en $\left[-\sqrt{3},-1\right[$, $\left]-1,1\right[$ y $\left]1,\sqrt{3}\right]$

Entonces hay un mínimo relativo en $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$ y un máximo relativo en $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$

e) Determine los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo. Establezca las coordenadas de los puntos de inflexión. (7 puntos)

$$f''(x)=\frac{-2x\left(x^2-9\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}$$

$-\infty \qquad -3 \qquad -1 \qquad 0 \qquad 1 \qquad 3 \qquad +\infty$

x^2-9	+	-	-	-	-	+
$\left(x^2-1\right)^7$	+	+	-	-	+	+
-2 x	+	+	+	-	-	-
$f'(x)$	+	-	+	-	+	-

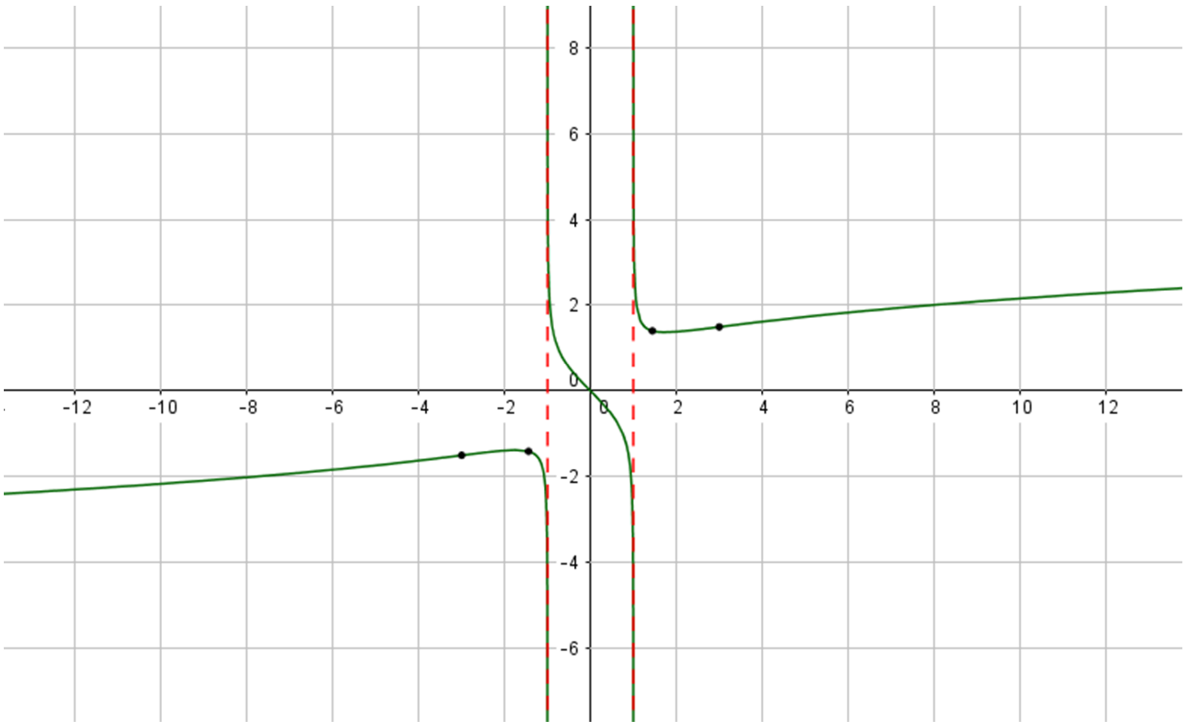
f es cóncava hacia abajo en $\left[-3,-1\right[$, $\left[\,0,1\,\right[$ y $\left[3,+\infty\right[$.

f es cóncava hacia arriba en $\left]-\infty,-3\right]$, $\left]-1,0\right]$ y $\left]1,3\right]$.

Entonces las coordenadas de los puntos de inflexión son $(0,0)$, $\left(-3,\frac{-3}{2}\right)$ y $\left(3,\frac{3}{2}\right)$.

f) Construya la gráfica de f donde se detallen cada uno de los aspectos anteriores.

(5 puntos)



5. Un objeto tiene forma de cilindro circular recto. Conforme se calienta, su altura disminuye a razón de 0,005 centímetros por minuto y su radio aumenta a razón de 0,0001 centímetros por minutos. ¿Con qué rapidez está cambiando el volumen del objeto, cuando este alcanza los 40 centímetros de altura y los 1,5 centímetros de radio? (5 puntos)

$h = h(t)$, altura que depende del tiempo, donde $\frac{dh}{dt} = -0{,}005\frac{cm}{\min}$

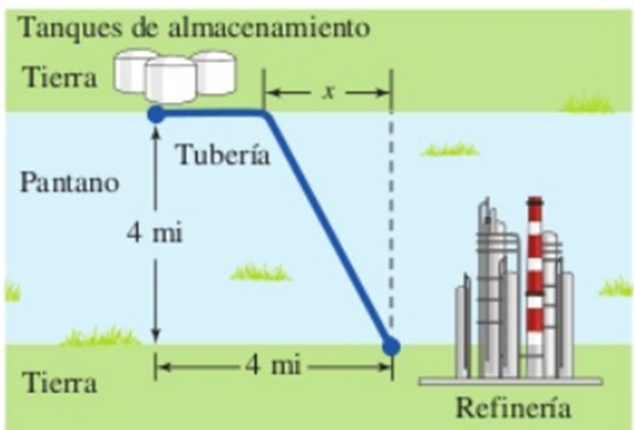
$r = r(t)$, radio que depende del tiempo, donde $\frac{dr}{dt} = 0{,}0001\frac{cm}{\min}$

$V = V(t)$, volumen que depende del tiempo, donde $\frac{dV}{dt}$ es lo que debemos determinar.

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow$$
$$V' = 2\pi r r' h + \pi r^2 h' \Rightarrow$$
$$V' = 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}0001 \cdot 40 + \pi (0{,}0001)^2 \cdot -0{,}005 \Rightarrow$$
$$V' \approx 0{,}0376$$

Por tanto el volumen cambia a razón de $V' \approx 0{,}0376 \frac{cm^3}{\min}$

6. Se va a construir una tubería desde una refinería a través de un pantano hasta tanques de almacenamiento como se muestra en la figura adjunta. El costo de construcción es de \$25000 por cada milla que se construya sobre el pantano y \$20000 por cada milla que se construya sobre tierra. Explique de qué manera debe construirse la tubería para que el costo de producción sea mínimo.



De acuerdo con la figura se tiene que

El costo de la tubería por tierra está dado por $(4 - x)20000$

El costo de la tubería por tierra está dado por $25000 \cdot \sqrt{x^2 + 16}$

Entonces la función que modela la situación es

El costo de la tubería por tierra está dado por $f : [0,4] \rightarrow I\!R$

$$f(x) = 20000(4 - x) + 25000\sqrt{x^2 + 16} = 80000 - 20000x + 25000\sqrt{x^2 + 16}$$, luego

$f'(x) = -20000 + 25000\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}$, para hallar puntos críticos se considera

$$f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$20000 = 25000\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow$$
$$4\sqrt{x^2+16} = 5x \Rightarrow$$
$$16\left(x^2+16\right) = 25x^2 \Rightarrow$$
$$256 = 9x^2 \Rightarrow$$
$$\frac{256}{9} = x^2 \Rightarrow$$
$$\pm\frac{16}{3} = x$$

Note que $\pm\dfrac{16}{3} \notin [0,4]$

Luego como f es continua en $[0,4]$, entonces por el teorema del valor extremo f alcanza un mínimo en ese intervalo,

$$f(0) = 180000$$

$$f(4) \approx 141221{,}35$$

Por tanto la tubería debe construirse directamente desde la refinería hasta los tanques a través del pantano para que el costo sea mínimo.