SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO

17 de junio de 2017

INSTRUCCIONES GENERALES:

- Lea cuidadosamente, cada instrucción y pregunta, antes de contestar.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta azul o negra indeleble para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.
- **Este examen consta de tres partes: Complete, Respuesta Breve y Desarrollo, para un total de 64 puntos.**
- **El tiempo disponible para resolver la prueba es de tres horas**.

I Parte. Complete. Escriba en el espacio correspondiente el o los objetos matemáticos (ecuación, conjunto, valor, etc.) que completan correctamente cada oración. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** *(6 puntos, un punto cada respuesta correcta).*

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la gráfica de la figura 1 correspondiente a la función f.

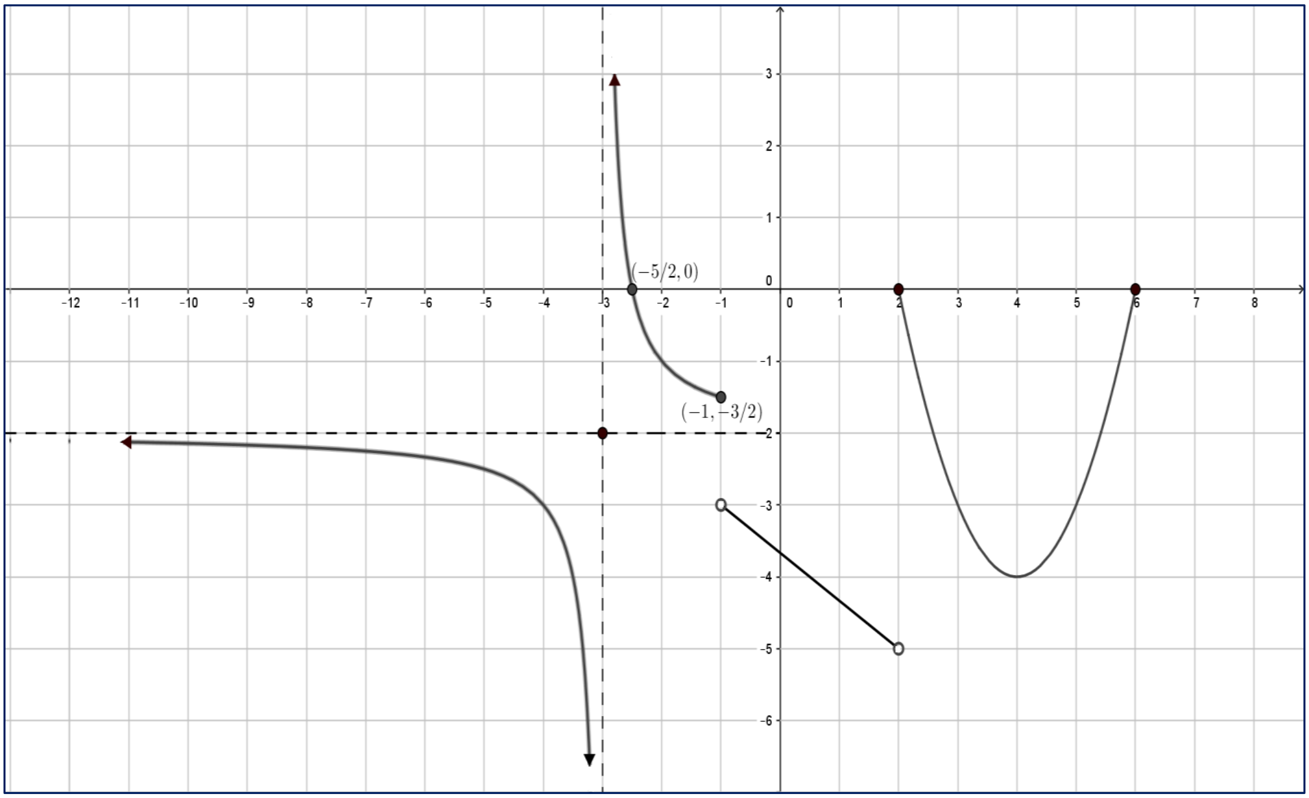

Figura 1.

1) La ecuación de la asíntota horizontal corresponde a ………………………… ____________________.

2) Un intervalo donde $f'(x) < 0$ corresponde a ..………………..……………… ____________________.

3) El (o los) conjunto (s) donde $f''(x) < 0$ corresponde (n) a ...………………… ____________________.

4) El valor numérico donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a ……… ____________________.

5) Un intervalo $[a, b]$ en el que se cumple el Teorema del Valor Medio, y además, con certeza se tiene $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -1$, corresponde a ……………………………………………..... ____________________.

6) Un intervalo I en el que con certeza $f'(x) = k$, $k \in \mathbb{R}, \forall x \in I$ corresponde a ____________________.

II Parte. Respuesta Breve. Para cada uno de las siguientes figuras, de acuerdo con cada gráfica de una función f, indique si se cumple o no el Teorema de Rolle en el intervalo I dado, de no cumplirse, describa la hipótesis (condición) que no se cumple. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** *(3 puntos)*

1) $I = [-1,1]$

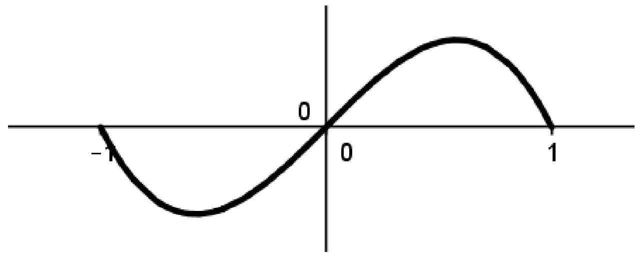

Figura 2.

2) $I = [-1,1]$

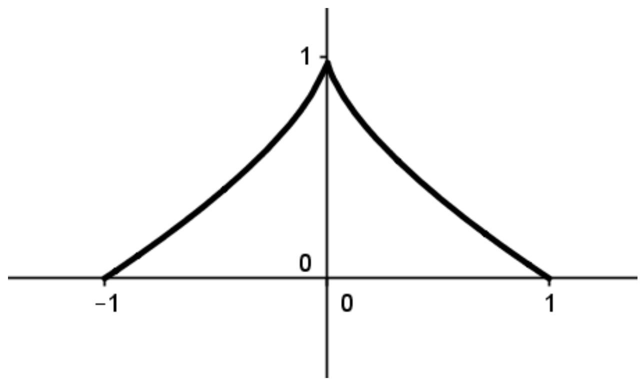

Figura 3.

III Parte. Desarrollo. Debe escribir todo los procedimientos, en su cuaderno de examen, que justifiquen cada una de sus respuestas.

1) En la figura 4, se presenta la gráfica de la curva con ecuación $x^2 - y^2 = 3$.

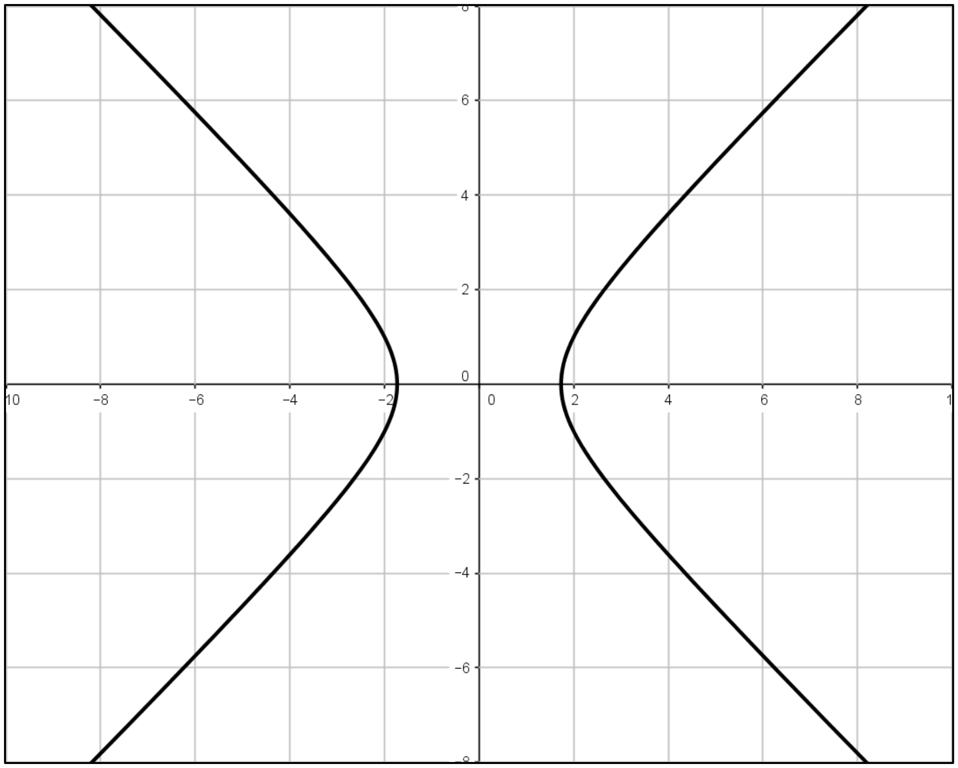

Figura 4

Con base en la información:

a) ***(5 puntos)*** Demuestre que las rectas tangentes a la curva en $(-2,1)$ y $(2,1)$ se intersecan.

b) ***(4 puntos)*** Determine los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a la recta definida por $y = 2x$.

2) ***(4 puntos)*** Sea f una función polinomial definida en su máximo dominio, tal que $f(x) = -x^3 + kx^2 + 5x - 2$. Determine el valor de k para que f posea un punto de inflexión en $x = 2$.

3) Determine en cada caso y', no es necesario simplificar.

a) ***(7 puntos)*** $y = [\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}}$

b) ***(4 puntos)*** $y = arcsen(e^x + x) - 5^{\sec(x)}$

4) Calcule los siguientes límites:

a) ***(6 puntos)*** $\lim_{x \to 0} \left[\frac{ln(1+sen(x))-x}{x^2} \right]$.

b) **(*7 puntos)*** $\lim_{x \to 0^+} [ln^2(x)]^x$.

5) Resuelva los siguientes problemas:

a) ***(7 puntos)*** Hallar dos números positivos cuya suma es 30 tal que el cuadrado de uno por el cubo del otro sea máximo.

b) ***(5 puntos)*** Determine la velocidad a la que baja el nivel de un fluido contenido en un tanque cilíndrico, sabiendo que se bombea hacia afuera el fluido a razón de 3000 litros por minuto. Recuerde que $1m^3$ posee $1000\ l$.

6) ***(6 puntos)*** Trace la gráfica de la función f que satisface todas las condiciones dadas a continuación:

a) $-\sqrt{2}$ $\quad 0 \quad$ $\sqrt{2}$ $\quad +\infty$

$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$

b) $\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = -\infty$ e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

SOLUCIONARIO SEGUNDO EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO

17 de junio de 2017

I Parte. Complete. Escriba en el espacio correspondiente el o los objetos matemáticos (ecuación, conjunto, valor, etc.) que completan correctamente cada oración. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** *(6 puntos, un punto cada respuesta correcta).*

Para los ítems del 1 al 6, utilice como referencia la gráfica de la figura 1 correspondiente a una función f.

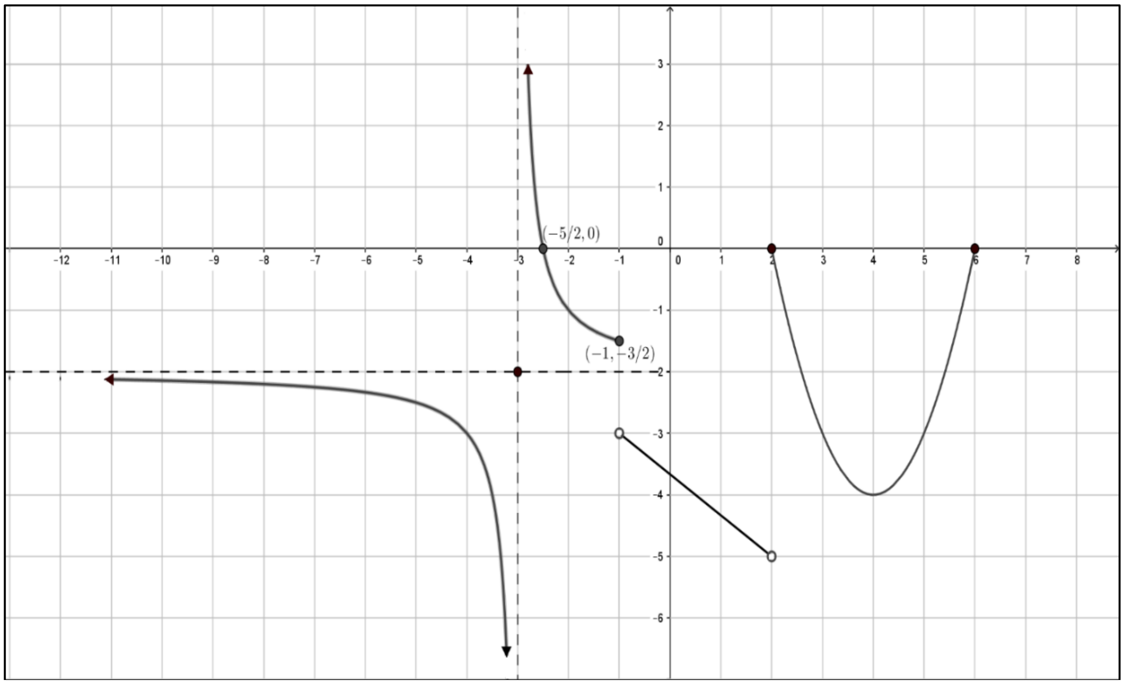

Figura 1.

1) La ecuación de la asíntota horizontal corresponde a $\underline{y = -2}$.

2) Un intervalo donde $f'(x) < 0$ corresponde a $\underline{]-\infty,-3[,\ ]-3,-1],\ ]-1,2[\ o\ [2,4[}$.

3) El (o los) conjunto(s) donde $f''(x) < 0$ corresponde(n) a $\underline{]-\infty,-3[}$.

4) El valor numérico donde f alcanza un mínimo relativo corresponde a $\underline{x = 4}$.

5) Un intervalo $[a,b]$ en el que se cumple el Teorema del Valor Medio, y además, con certeza se tiene $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -1$, corresponde a $\underline{\left[\frac{-5}{2},-1\right]}$ *o* $\underline{[3,4]}$.

6) Un intervalo I en el que con certeza $f'(x) = k,\ k \in \mathbb{R}, \forall x \in I$ corresponde a $\underline{]-1,2[}$ <u>o cualquier subconjunto de este</u>.

II Parte. Respuesta Breve. Para cada uno de los siguientes casos, de acuerdo con cada gráfica de una función f, indique si se cumple o no el Teorema de Rolle en el intervalo I dado, de no cumplirse, describa la hipótesis (condición) que no se cumple. **Posteriormente escriba el número de ítem con su respectiva respuesta en su cuaderno de examen.** *(3 puntos)*

1) $I = [-1,1]$

R/ Sí se cumplen las hipótesis del teorema.
(La f es continua en I, es derivable en $]-1,1[, f(a) = f(b))$

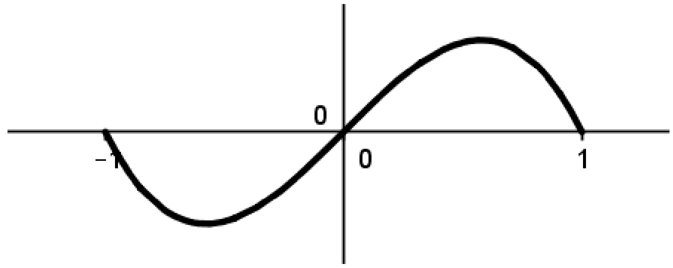

Figura 2.

2) $I = [-1,1]$

R/ No se cumple el Teorema de Rolle, pues f no es derivable en todo punto de $]-1,1[$ dado que en $x = 0$ hay un pico.

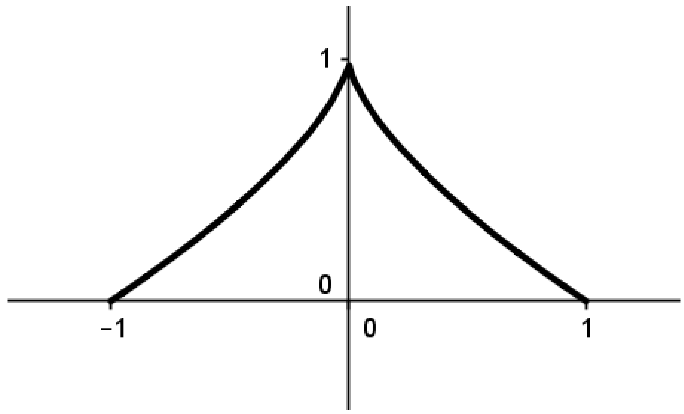

Figura 3.

III Parte. Desarrollo.

1) En la figura 4 se presenta la gráfica de la curva con ecuación $x^2 - y^2 = 3$.

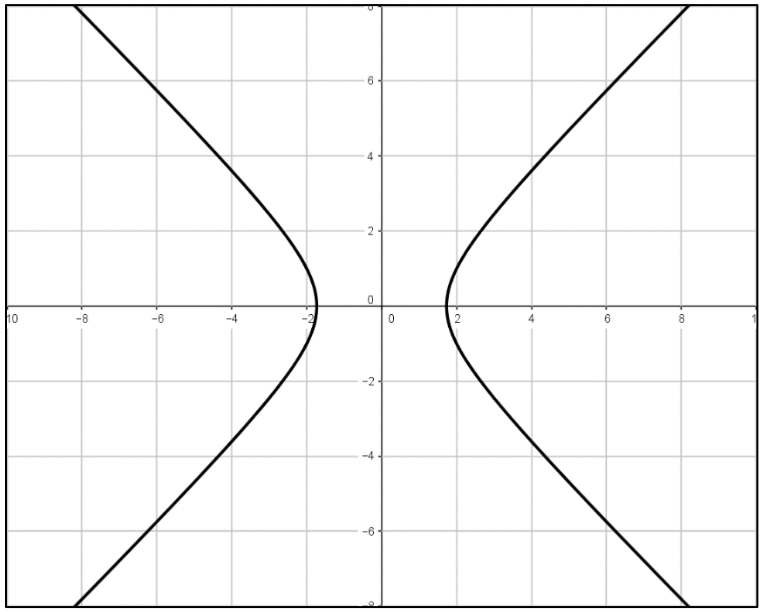

Figura 4

a) ***(5 puntos)*** Demuestre que las rectas tangentes a la curva en $(-2{,}1)$ y $(2{,}1)$ se intersecan.

Solución:

- Se determina la derivada de la curva usando derivación implícita, y se obtiene:

$(x^2 - y^2)' = (3)'$

$2x - 2y \cdot y' = 0$, luego al despejar y' tenemos

$2x = 2y \cdot y' \to \frac{x}{y} = y'$

- Se determina el criterio de la recta tangente en $(-2{,}1)$:

Para la pendiente: $y'|_{(-2,1)} = -2$,

Criterio: $y - 1 = -2(x - -2) \to y = -2x - 3$

- Se determina el criterio de la recta tangente en $(2{,}1)$:

Para la pendiente: $y'|_{(2,1)} = 2$,

Criterio: $y - 1 = 2(x - 2) \to y = 2x - 3$

Como ambas rectas tienen el mismo punto de intersección con el eje Y, $(0, -3)$, este punto es común a las rectas de ahí que sea el punto de intersección entre ellas.

b) ***(4 puntos)*** Determine los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a la recta definida por $y = 2x$.

Solución:

- Como la recta tangente de la curva es paralela a la recta $y = 2x$, esto indica que la pendiente es 2, así

$\frac{x}{y} = 2 \leftrightarrow x = 2y$, de donde los puntos tienen la forma $(2y, y)$.

- Al sustituir $(2y, y)$ en la ecuación de la curva dada, se obtiene

$(2y)^2 - y^2 = 3$

$\leftrightarrow 3y^2 = 3$

$\leftrightarrow y = \pm 1$

- Al sustituir $y = 1$ se tiene $(2,1)$, y si $y = -1$ tenemos $(-2,-1)$, así los puntos de la curva en los que la recta tangente es paralela a $y = 2x$ son $(2,1), (-2,-1)$

2) ***(4 puntos)*** Sea f una función polinomial definida en su máximo dominio, tal que $f(x) = -x^3 + kx^2 + 5x - 2$. Determine el valor de k para que f posea un punto de inflexión en $x = 2$.

Solución:

- Se determina la segunda derivada de la función dada:

$f(x)' = (-x^3 + kx^2 + 5x - 2)'$

$f(x)' = -3x^2 + 2kx + 5$

$f(x)'' = -6x + 2k$

- Si la función tiene un punto de inflexión en 2, se tiene

$f(2)'' = 0$

$-6 \cdot 2 + 2k = 0 \leftrightarrow k = 6$

Por lo tanto, $k = 6$.

3) Determine en cada caso y', no es necesario simplificar:

a) ***(7 puntos)*** $y = [\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}}$.

Solución:

Al utilizar derivación logarítmica se obtiene:

$\ln y = ln[\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}}$

$\rightarrow \quad \ln y = \tan^{-1}\sqrt{x} \cdot \ln[\log_3(2x)]$

$\rightarrow \frac{1}{y} \cdot \; y' = \left(\tan^{-1}\sqrt{x}\right)' \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x}\,[\ln[\log_3(2x)]]'$

$$\rightarrow \frac{1}{y} \cdot \; y' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \; \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot (\log_3(2x))'$$

$$\rightarrow \frac{1}{y} \cdot \; y' = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \; \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot \frac{2}{2xln\,3}$$

$$\rightarrow y' = y \cdot \left[\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \; \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot \left(\frac{2}{2xln\,3}\right)\right]$$

$$\rightarrow y' = [\log_3(2x)]^{\tan^{-1}\sqrt{x}} \cdot \left[\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}} \cdot \ln[\log_3(2x)] + \tan^{-1}\sqrt{x} \; \cdot \frac{1}{\log_3(2x)} \cdot \left(\frac{2}{2xln\,3}\right)\right]$$

b) ***(4 puntos)*** $y = arcsen(e^x + x) - 5^{\sec(x)}$

Solución:

Al derivar se obtiene:

$$y' = \left[arcsen(e^x + x) - 5^{\sec(x)}\right]'$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x+x)^2}} \cdot (e^x + x)' - \sec x \cdot \tan x \;\; \cdot \ln 5 \; \cdot 5^{\sec x}$$

$$\rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x+x)^2}} \cdot (e^x + 1) - \ln 5 \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot 5^{\sec(x)}$$

4) Calcule los siguientes límites:

a) ***(6 puntos)*** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{ln(1+sen(x))-x}{x^2}\right]$.

Solución:

- Al sustituir $x = 0$, se tiene $\frac{ln(1+sen(0))-0}{0^2} = \frac{0}{0}$, forma indeterminada.
- Aplicar la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{[ln(1+sen(x))-x]'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+sen(x)} \cdot \cos x - 1}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos x - (1+sen(x))}{1+sen(x)}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 - sen(x)}{2x[1+sen(x)]}$$

Al evaluar se obtiene forma indeterminada $\frac{\cos(0)-1-sen(0)}{2\cdot 0[1+sen 0]} = \frac{0}{0}$

Al aplicar L´Hôpital, se obtiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + cosx}{2[1+sen(x)] + 2xcos\, x}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

b) ***(7 puntos)*** $\lim_{x \to 0^+} [ln^2(x)]^x$.

Solución:

- Al sustituir $x = 0^+$, se tiene ∞^0, forma indeterminada.
- El límite se puede reescribir como:

$y = \lim_{x \to 0^+} [ln^2(x)]^x$

$\ln(y) = ln\left[\lim_{x \to 0^+} [ln^2(x)]^x\right] \to \ln(y) = \lim_{x \to 0^+} xln[ln^2(x)]$

Ahora calculamos el límite $\lim_{x \to 0^+} xln[ln^2(x)]$:

$\lim_{x \to 0^+} xln[ln^2(x)]$ que al evaluarlo tiene otra forma indeterminada $0 \cdot \infty$.

- Al aplicar la regla de L´Hôpital se tiene

$\lim_{x \to 0^+} xln[ln^2(x)]$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{ln[ln^2(x)]}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\left[ln[ln^2(x)]\right]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{ln^2(x)} \cdot 2ln(x) \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{2}{xln(x)}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{lnx}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{-2}{lnx}$$

$$= 0$$

Como, $\ln(y) = 0 \leftrightarrow e^0 = 1$. Por lo tanto, $\lim_{x \to 0^+} [ln^2(x)]^x = 1$

5) Resuelva los siguientes problemas:

a) ***(7 puntos)*** Hallar dos números positivos cuya suma es 30 tal que el cuadrado de uno por el cubo del otro sea máximo.

Solución:

- Planteo de las ecuaciones: con x, y números positivos

$x + y = 30 \rightarrow y = 30 - x,$
$x^2 y^3 = P$,

Luego, el criterio de la función para trabajar corresponde a: $x^2 (30 - x)^3 = P(x)$**.**

Para determinar el dominio donde tiene sentido el problema dado, conviene hallar los valores que hacen cero a la función, que son 0 y 30, así

$p(x) = x^2 (30 - x)^3, p: [0,30] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Calcular p'.

$p(x) = x^2 (30 - x)^3$
$p'(x) = 2x (30 - x)^3 - 3x^2(30 - x)^2$
$p'(x) = x (30 - x)^2[2(30 - x) - 3x]$

$p'(x) = x\,(30-x)^2(60-5x)$
$p'(x) = 5x\,(30-x)^2(12-x)$

- Buscar $p'(x)$=0.

$5x\,(30-x)^2(12-x) = 0 \;\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 12 \lor x = 30$

- Como la función p es polinomial y continua, cuando $x \in\ [0,30]$ la función alcanza un máximo, así que al evaluar se obtiene

$p(0) = 0, p(30) = 0, p(12) = 839808$

Por lo tanto, los números corresponden a 12 y 18.

b) ***(5 puntos)*** Determine la velocidad a la que baja el nivel de un fluido contenido en un tanque cilíndrico, sabiendo que se bombea hacia afuera el fluido a razón de 3000 litros por minuto. Recuerde que $1m^3$ posee $1000\ l$.

Solución:

- Planteo:

$$\left.\begin{array}{l} r\ es\ una\ constante \\ V = V(t) \\ h = h(t), t\ en\ minutos \\ \dfrac{dV}{dt} = 3000l/\min \\ \dfrac{dh}{dt} =? \end{array}\right\}$$

- Criterio de la función que permite trabajar:

$V\ = 1000\pi\, r^2 h$, pues $1m^3$ posee $1000\ l$.

- Calcular V' utilizando derivación implícita

$V'\ = 1000\pi\, r^2 h'\ \ \rightarrow$

$-3000 = 1000\pi\, r^2 h'$

$\Rightarrow \frac{-3}{\pi\, r^2} = h'$

Por lo tanto, el fluido decrece a razón de $\frac{3}{\pi\, r^2}\ \ l/min$.

6) Gráfica para una función f, de acuerdo con las condiciones :