Cálculo

II Examen Parcial 2023

Sábado 17 de junio

Instrucciones

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y cada pregunta antes de contestar.
2. Este examen consta de 3 partes: selección única (3 puntos), respuesta corta (4 puntos) y desarrollo (34 puntos), para un total de 41 puntos.
3. La prueba está diseñada para ser resuelta en máximo 2 horas y 30 minutos. A quienes inicien tarde no se les repondrá el tiempo perdido.
4. La prueba debe resolverse individualmente.
5. **Anote en su cuaderno de examen todas las respuestas de las tres partes del examen** en forma clara, ordenada, con letra legible y utilizando lapicero de tinta azul o negra. Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Las respuestas anotadas en el enunciado de la prueba no serán tomadas en cuenta.
6. En los **ítems de selección única**, usted deberá indicar en el cuaderno de examen el número de ítem e indicar la letra que corresponde a la opción que completa en forma correcta y verdadera la expresión dada. Sólo se calificará la opción de respuesta seleccionada que se encuentre escrita en el cuaderno de examen.
7. Para responder la parte de desarrollo debe incluir **todos** los procedimientos que llevan a la respuesta. Si alguna respuesta o procedimiento está desordenado, éste no se calificará.
8. Utilice únicamente **bolígrafo** de tinta indeleble en sus respuestas. En caso de utilizar lápiz o corrector, esto podrá afectarle si deseara hacer reclamos.
9. Recuerde que puede utilizar calculadora científica, que no sea programable ni graficadora.

I parte: Selección única

Escriba en el cuaderno de examen la letra que corresponde a la respuesta que usted considere correcta. (3 puntos, un punto cada respuesta correcta)

Para los tres ítems de esta sección, se considera una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos veces derivable, y la siguiente tabla de signos para las funciones f' y f'':

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

1. ¿Cuál de los siguientes es un intervalo donde la gráfica de f es, con certeza, decreciente y cóncava hacia arriba?

   A) $]1,2[$

   B) $]3,4[$

   C) $]-1,1[$

   D) $]-1,0[$

2. Considere las siguientes proposiciones:

   I. Si $f''(0)=0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x=0$.

   II. f tiene **al menos** dos puntos críticos.

   Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

   A) Solo la I

   B) Solo la II

   C) Ambas

   D) Ninguna

3. Considere las siguientes proposiciones:

   I. **La derivada** f' tiene un máximo local en $x = 1$.

   II. f tiene un mínimo local en $x = 0$

   Con base en la información anterior, ¿cuál o cuáles de las proposiciones anteriores son, con certeza, verdaderas?

   A) Solo la I

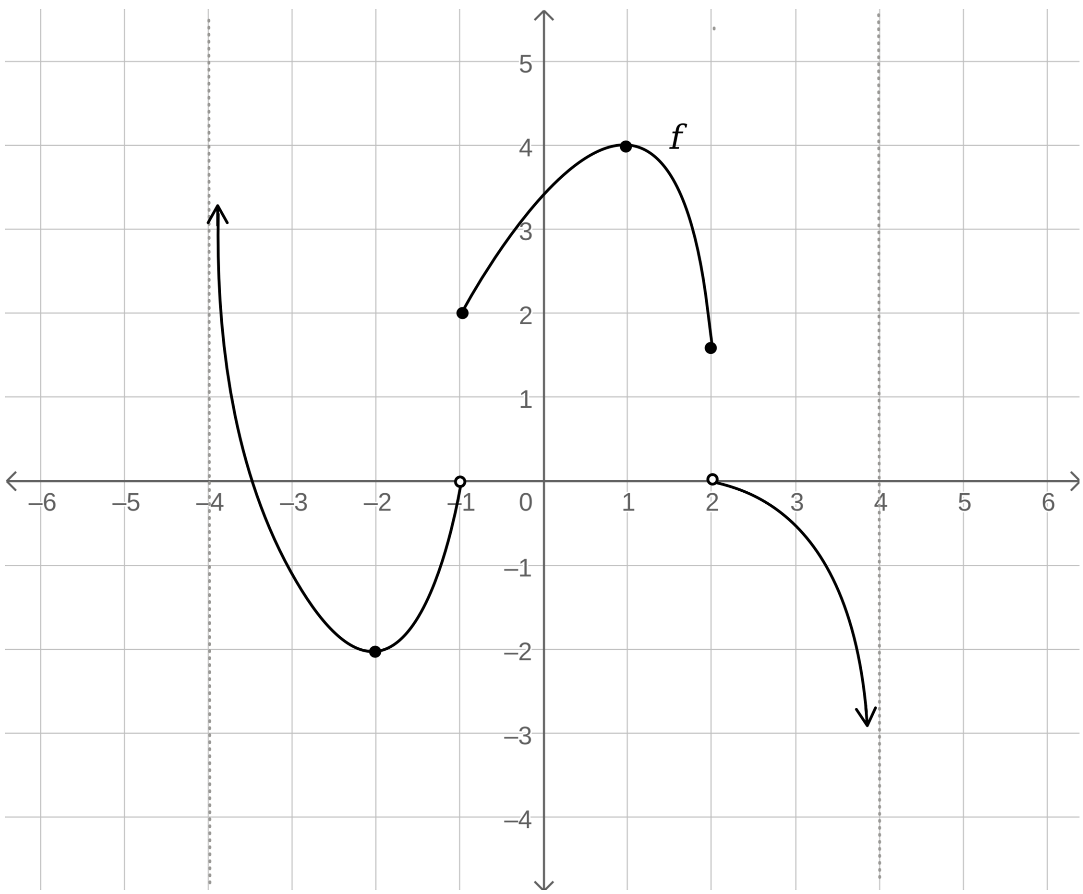
   B) Solo la II

   C) Ambas

   D) Ninguna

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f. Determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. Si un límite es infinito, **no debe escribir** "no existe", sino el infinito con el signo correspondiente. (4 puntos)



1. Un valor de x donde f tiene un máximo local
2. El conjunto solución de $f'(x) < 0$
3. Un intervalo donde $f''(x) > 0$
4. $\lim\limits_{x \to -4^+} f'(x)$

III parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen **todos** los procedimientos que justifiquen su respuesta. Realice los ejercicios del 1 al 4. Luego, puede escoger entre realizar o bien el ejercicio 5, o bien el ejercicio 6. Realizar ambos **no supone** puntos adicionales: si realiza ambos se calificará solamente el primero que aparezca en su cuaderno.

1. Utilizando la regla de L'Hôpital, calcule el límite (6 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Calcule la derivada de la función $f(x) = x^{x^2+1}$. No es necesario simplificar el resultado. (6 puntos)

3. Considere la función con criterio $g(x) = -x^{2023} + x^{2022} + x$. Demuestre que g tiene un punto crítico en el intervalo $[-1, 1]$. (5 puntos)

4. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $\ln(y) = xy + x + \ln(2)$ en el punto $(0, 2)$. (9 puntos)

5. La función que modela las ganancias diarias de una empresa a partir de la venta de un producto es
$$U(x) = (x-30)^4 (x+5)^2,$$
donde x es la cantidad en unidades de producto que se vende cada día. Si la fábrica de la empresa tiene la capacidad de generar entre 0 y 45 unidades por día, ¿cuál cantidad de venta le generará a la empresa mayores ganancias? (8 puntos)

6. Un laboratorio de pinturas está desarrollando una nueva fórmula, para lo cual necesitan estudiar la viscosidad de la nueva pintura. Para ello, se derraman 300 cm^3 de pintura sobre una placa de vidrio (el volumen de la pintura es constante a través del estudio). La pintura se expande sobre la placa en forma cilíndrica, aumentando su radio y disminuyendo su espesor. Cuando el derrame de pintura alcanza un radio de 20 cm, el radio crece a razón de $1,2$ cm/s. ¿Qué tan rápido **disminuye** el espesor del cuerpo de pintura en ese momento?

(8 puntos)

Nota para el ejercicio 6: recuerde que la fórmula para el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$ donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.**No** utilice aproximaciones decimales en su procedimiento. No olvide las unidades en su respuesta.

Fin del examen

Proyecto MATEM-Cálculo

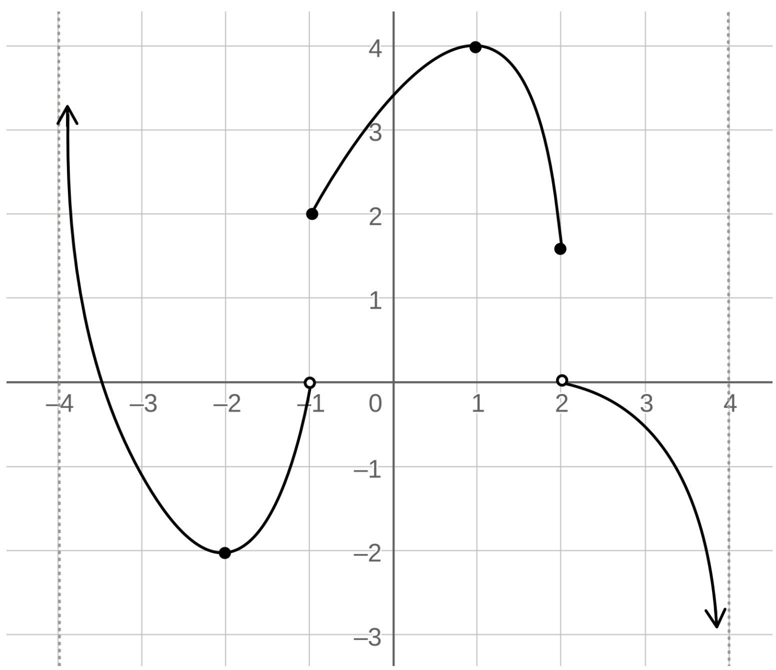
I Examen Parcial 2023- Solucionario

I parte: Selección única

1. D **2.** B **3.** C

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f. Determine lo que se le solicita y anote su respuesta en el cuaderno de examen. Si un límite es infinito, **no debe escribir** “no existe”, sino el infinito con el signo correspondiente. (4 puntos)



1. Un valor de x donde f tiene un máximo local: $x = 1$.
2. El conjunto solución de $f'(x) < 0$: $]-4,-2[\cup]1,2[\cup]2,4[$
3. Un intervalo donde $f''(x) > 0$: cualquier subintervalo de $]-4,-1[$
4. $\displaystyle\lim_{x\to -4^+} f'(x) = -\infty$

III parte: Desarrollo

1. Utilizando la regla de L'Hôpital, calcule el límite (6 puntos)

$$\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Método 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right) \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2x}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2x\cos(x)}\right) \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{-1}{2\cos(x)}\right) \\
&= \exp\left(\frac{-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt pasar a base e
- ▷ 1pt meter el límite dentro de la exponencial
- ▷ 2pts aplicación de la regla de l'Hôpital
- ▷ 1pt separar la fracción para usar límites especiales
- ▷ 1pt evaluar límites

Método 2:

Se toma $y = \lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$, de esta manera $\ln(y) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$. Luego:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2x\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{-1}{2\cos(x)} \\
&= \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt introducir el logaritmo y simplificar
- ▷ 2pts aplicación de la regla de l'Hôpital
- ▷ 1pt separar la fracción para usar límites especiales
- ▷ 1pt evaluar límites
- ▷ 1pt despejar el valor del límite

Como $\ln(y) = \frac{-1}{2}$, entonces $y = e^{\frac{-1}{2}}$.

2. Calcule la derivada de la función $f(x) = x^{x^2+1}$. No es necesario simplificar el resultado.(6 puntos)

Método 1:

$$
\begin{aligned}
(x^{x^2+1})' &= \left(e^{(x^2+1)\ln(x)}\right)' \\
&= e^{(x^2+1)\ln(x)} \cdot ((x^2+1)\ln(x))' \\
&= e^{(x^2+1)\ln(x)} \left(2x\ln(x) + \frac{x^2+1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt pasar a base e
- ▷ 1pt derivada de la exponencial
- ▷ 1pt aplicar regla de la cadena
- ▷ 1pt aplicar regla del producto
- ▷ 1pt derivada del polinomio
- ▷ 1pt derivada del logaritmo

Método 2:

$$
\begin{aligned}
& \ln(f(x)) = (x^2+1)\ln(x) \\
\Rightarrow \quad & \ln(f(x))' = ((x^2+1)\ln(x))' \\
\Rightarrow \quad & \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\ln(x) + \frac{x^2+1}{x} \\
\Rightarrow \quad & f'(x) = f(x)\left(2x\ln(x) + \frac{x^2+1}{x}\right) \\
\Rightarrow \quad & f'(x) = x^{x^2+1}\left(2x\ln(x) + \frac{x^2+1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt introducir el logaritmo y simplificar
- ▷ 1pt derivada de $\ln(f(x))$
- ▷ 1pt aplicar regla del producto
- ▷ 1pt derivada del polinomio
- ▷ 1pt derivada de $\ln(x)$
- ▷ 1pt despejar $f'(x)$

3. Considere la función con criterio $g(x) = -x^{2023} + x^{2022} + x$. Demuestre que g tiene un punto crítico en el intervalo $[-1,1]$. (5 puntos)

Note que g es continua en $[-1,1]$, y derivable en $]-1,1[$, ya que es un polinomio. El teorema del valor medio indica que existe $c \in \,]-1,1[$ tal que:

$$g'(c) = \frac{g(1) - g(-1)}{1 - (-1)}.$$

Pero vea que $g(1) = g(-1) = 1$. Luego, $g'(c) = 0$. Es decir, c es un punto crítico de g.

Distribución de puntos:

- ▷ 1pt justificar que la función es continua y derivable
- ▷ 2pts aplicar el teorema del valor medio en el intervalo dado
- ▷ 1pt simplificar el valor de $g'(c)$
- ▷ 1pt concluir que c es punto crítico

4. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $\ln(y) = xy + x + \ln(2)$ en el punto $(0,2)$. (9 puntos)

Si la ecuación de la recta tangente que buscamos es $y = mx + b$, entonces $m = y'|_{(0,2)}$. Determinamos la derivada implícita:

$$\begin{aligned} \ln(y)' = (xy + x + \ln(2))' \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = y + xy' + 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} - xy' = y + 1 \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{y+1}{\frac{1}{y} - x} \end{aligned}$$

De esta manera,

$$m = y'|_{(0,2)} = \frac{2+1}{\frac{1}{2} - 0} = 6.$$

Para encontrar el valor de b evaluamos el punto en la ecuación: $2 = 6 \cdot 0 + b \quad \Rightarrow \quad b = 2$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es $y = 6x + 2$

Distribución de puntos:

- ▷ 2pts derivada de $\ln(y)$ (1pt derivada del logaritmo, 1pt regla de la cadena)
- ▷ 2pts regla del producto en xy
- ▷ 1pt derivada de $x + \ln(2)$
- ▷ 2pts despejar y evaluar y'
- ▷ 1pt valor de b
- ▷ 1pt concluir la ecuación de la recta tangente

5. La función que modela las ganancias diarias de una empresa a partir de la venta de un producto es

$$U(x) = (x-30)^4 (x+5)^2 ,$$

donde x es la cantidad en unidades de producto que se vende cada día. Si la fábrica de la empresa tiene la capacidad de generar entre 0 y 45 unidades por día, ¿cuál cantidad de venta le generará a la empresa mayores ganancias? (8 puntos)

Estamos buscando el máximo absoluto de la función $U(x)$ en el intervalo $[0, 45]$. Calculamos los puntos críticos:

$$\begin{aligned} U'(x) &= 4(x-30)^3(x+5)^2 + 2(x-30)^4(x+5) \\ &= 2(x-30)^3(x+5)(2(x+5)+x-30) \\ &= 2(x-30)^3(x+5)(3x-20) \end{aligned}$$

Los puntos críticos se ecuentran cuando $U'(x) = 0$. Tenemos 3 posibilidades:

$$\begin{aligned} x-30=0 &\quad \Rightarrow \quad x=30 \\ x+5=0 &\quad \Rightarrow \quad x=-5 \\ 3x-20=0 &\quad \Rightarrow \quad x=\frac{20}{3} \end{aligned}$$

Note que el punto crítico $x = -5$ está fuera del dominio que estamos trabajando, por lo que lo excluimos. Para encontrar el máximo, evaluamos U en los puntos críticos de interés y los extremos del intervalo:

$$U(30) = 0 \qquad U\left(\frac{20}{3}\right) = 40\,346\,021,95 \qquad U(0) = 20\,250\,000 \qquad U(45) = 126\,562\,500$$

Se concluye que el máximo absoluto está en $x = 45$. Es decir, la cantidad de unidades que genera la mayor ganancia es 45 unidades.

Distribución de puntos:

- ▷ 2pts calcular $U'(x)$ (1pt regla del producto, 1pt factorización)
- ▷ 2 pts soluciones de $U'(x) = 0$ (1pt igualar los factores a cero, 1pt despejar)
- ▷ 1pt excluir el punto crítico $x = -5$
- ▷ 1pt evaluar en los puntos críticos
- ▷ 1pt evaluar en los extremos del intervalo
- ▷ 1pt determinar el máximo

6. Un laboratorio de pinturas está desarrollando una nueva fórmula, para lo cual necesitan estudiar la viscosidad de la nueva pintura. Para ello, se derraman 300 cm^3 de pintura sobre una placa de vidrio (el volumen derramado no cambia). La pintura se expande sobre la placa en forma cilíndrica, aumentando su radio y disminuyendo su espesor. Cuando el derrame de pintura alcanza un radio de 20 cm, el radio crece a razón de $1,2$ cm/s. ¿Qué tan rápido **disminuye** el espesor del cuerpo de pintura en ese momento? (8 puntos)

   Nota para el ejercicio 6: recuerde que la fórmula para el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$ donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro.**No** utilice aproximaciones decimales en su procedimiento. No olvide las unidades en su respuesta.

   La fórmula del volumen del cilindro que se forma es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio de la base y h la altura (el espesor del cuerpo de pintura). Note que r, h cambian respecto al tiempo, por lo que $r = r(t)$ y $h = h(t)$ son funciones del tiempo.

   Ahora, si t_0 es el momento en que $r(t_0) = 20$, entonces $r'(t_0) = 1,2$. Además, utilizando la ecuación del volumen, y el volumen dado de pintura, se tiene:

$$300 = \pi \cdot 20^2 h(t_0) \quad \Rightarrow \quad h(t_0) = \frac{300}{400\pi} = \frac{3}{4\pi}.$$

   Estamos buscando la razón de cambio de h en el momento t_0. Es decir, estamos buscando $h'(t_0)$. Vea que

$$300 = \pi r(t_0)^2 h(t_0).$$

   Realizamos derivación implícita para determinar $h'(t_0)$:

$$0 = 2\pi r(t_0) r'(t_0) h(t_0) + \pi r(t_0)^2 h'(t_0).$$

   Ahora reemplazamos los datos que conocemos (a saber, $r(t_0), r'(t_0)$ y $h(t_0)$):

$$0 = 2\pi \cdot 20 \cdot 1,2 \cdot \frac{3}{4\pi} + \pi \cdot 20^2 \cdot h'(t_0)$$

   Despejando, se obtiene

$$h'(t_0) = \frac{-144}{1600\pi}.$$

   Es decir, el espesor del cuerpo de pintura disminuye a razón de $\frac{144}{1600\pi}$ cm/s

   Distribución de puntos:

   - ▷ 1pt establecer que $r'(t_0) = 1,2$
   - ▷ 1pt determinar el valor de $h(t_0)$
   - ▷ 3pts derivación de la ecuación (1pt derivada de la constante, 1pt regla del producto, 1pt regla de la cadena)
   - ▷ 1pt reemplazar valores conocidos en la ecuación
   - ▷ 1pt despejar $h'(t_0)$
   - ▷ 1pt razón de **disminución** correcta