Solución Segundo Examen Parcial

1. Verifique que, para curva dada por $x^4 + y^4 = 16$, se cumple que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-48x^2}{y^7}$$

Se calcula, de forma implícita, la primera derivada de $x^4 + y^4 = 16$ de donde:

$$4x^3 + 4y^3y^{'} = 0 \Rightarrow y^{'} = -\frac{x^3}{y^3} \ (*)$$

Se calcula la segunda derivada de donde

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3x^2y^3 + 3x^3y^2y^{'}}{y^6} = \frac{-3x^2y^3 + 3x^3y^2\frac{-x^3}{y^3}}{y^6} \text{ por(*)}$$

Así, simplificando

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3x^2y^6 - 3x^6y^2}{y^9} = \frac{-3x^2y^2(x^4 + y^4)}{y^9}$$

Sustituyendo por la relación inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3x^2y^2 16}{y^9} = \frac{-48x^2y^2}{y^7}$$

2. Calcule $f'(x)$ para la función f definida por $f(x) = \left(\dfrac{4}{x}\right)^{arctan\left(x^2-2x+3\right)}$ con $x > 0$

Se usa derivación logarítmica de donde se tiene la siguiente relación:

$$\ln f(x) = \ln\left[\left(\frac{4}{x}\right)^{arctan\left(x^2-2x+3\right)}\right] = [arctan\,(x^2-2x+3)]\ln\left(\frac{4}{x}\right)$$

Así, al calcular $f'(x)$ se obtiene:

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \tfrac{2x-2}{1+(x^2-2x+3)^2}\ln\left(\frac{4}{x}\right) + arctan\,(x^2-2x+3)\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{-4}{x^2}$$

Finalmente

$$f'(x) = \left[\tfrac{2x-2}{1+(x^2-2x+3)^2}\ln\left(\frac{4}{x}\right) - \frac{arctan\,(x^2-2x+3)}{x}\right]\left(\frac{4}{x}\right)^{arctan\left(x^2-2x+3\right)}$$

3. Calcule, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{t\to 1}\left(\frac{t}{t-1} - \frac{1}{ln(t)}\right)$

Presenta una forma indefinida $\infty - \infty$, se ajusta de la siguiente manera:

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{t}{t-1} - \frac{1}{ln(t)}\right) = \lim_{t\to 1}\frac{t\ln(t) - t + 1}{(t-1)\ln(t)}$$

Este último límite tiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.
Al aplicar L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{t\to 1}\frac{t\ln(t) - t + 1}{(t-1)\ln(t)} = \lim_{t\to 1}\frac{\ln(t) + 1 - 1}{\ln(t) + \dfrac{t-1}{t}} = \lim_{t\to 1}\frac{t\ln(t)}{t\ln(t) + t - 1}$$

Al volver a evaluar se tiene nuevamente la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$
Se aplica nuevamente L'Hôpital

$$\lim_{t\to 1}\frac{t\ln(t)}{t\ln(t) + t - 1} = \lim_{t\to 1}\frac{\ln(t) + 1}{\ln(t) + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \displaystyle\lim_{t\to 1}\left(\frac{t}{t-1} - \frac{1}{ln(t)}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{y\to 5}(6-y)^{\frac{1}{y-5}}$

Presenta una forma indeterminada 1^{∞} Se procede de la siguiente manera:

$$\lim_{y\to 5}(6-y)^{\frac{1}{y-5}} = \lim_{y\to 5} e^{\ln\left((6-y)^{\frac{1}{y-5}}\right)} = \lim_{y\to 5} e^{\left(\frac{1}{y-5}\right)\ln(6-y)} = e^{\lim\limits_{y\to 5}\left(\frac{1}{y-5}\right)\ln(6-y)} \quad (*)$$

Nótese que $\lim\limits_{y\to 5}\left(\dfrac{1}{y-5}\right)\ln(6-y)$ presenta una forma indeterminada $0\cdot\infty$ y

$$\lim_{y\to 5}\left(\frac{1}{y-5}\right)\ln(6-y) = \lim_{y\to 5}\frac{\ln(6-y)}{y-5}$$

Este último límite presenta la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ por lo cual al aplicar L'Hôpital se tiene que:

$$\lim_{y\to 5}\frac{\ln(6-y)}{y-5} = \lim_{y\to 5}\frac{-1}{6-y} = -1 \ (**)$$

Luego de (*) y (**) se sigue que $\lim\limits_{y\to 5}(6-y)^{\frac{1}{y-5}} = e^{-1}$

4. Justifique si la función g, definida por $g(x) = x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$, satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0,3]$. En caso afirmativo determine un número real c que satisfaga la conclusión de dicho teorema.

   Justificar condiciones T. Rolle

   a) Continuidad
   Nótese que g es continua en $\mathbb{R}$ y en particular es continua en $[0,3]$

   b) Derivabilidad
   Nótese que $g'(x) = \dfrac{4x-3}{3\sqrt[3]{x^2}}$ por lo cual es derivable en $\mathbb{R}-0$ y en particular es derivable en $]0,3[$

   c) $g(0) = 0$ y $g(3) = 0$

De a), b) y c) $\exists c \in]0,3[\quad tq \quad g^{'}(x) = 0$, ie,

$$\begin{aligned} \frac{4c-3}{3\sqrt[3]{c^2}} &= 0 \\ \Rightarrow 4c-3 &= 0 \\ \Rightarrow c &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Nótese que $c \in]0,3[$

5. Resuelva los siguientes problemas

   a) Un rectángulo tiene un vértice en $(0,0)$, un lado está en el eje X y el otro está en el eje Y. El vértice opuesto a $(0,0)$ está sobre la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \leqslant x \leqslant 3$. Para dicho rectángulo ¿cuál es el área máxima posible?

   Sean x e y el largo y ancho del rectángulo respectivamente.
   La función que determina el área de dicho rectángulo corresponde a

   $$A : [0,3] \to \mathbb{R} \quad tq \quad A(x) = x\,(2x^2 - 9x + 12)$$

   Luego $A(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ y $A^{'}(x) = 6x^2 - 18x + 12$ Los puntos críticos corresponden,

   para esta función, son aquellos en los que $A^{'}(x) = 0$, ie, $6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2$

   Por otra parte se sabe que la función A es continua en su dominio y alcanzará un máximo absoluto.
   Así
   $A(0) = 0$
   $A(1) = 5$
   $A(2) = 4$
   $A(3) = 9$

   R/El área máxima para el rectángulo será 9 $(u.l)^2$

b) En un triángulo escaleno dos lados y el ángulo determinado por estos cambian con el tiempo. El ángulo aumenta a razón de $\frac{\pi}{6}\ \frac{Rad}{min}$; uno de los lados crece a razón de $3\frac{m}{min}$ y el otro decrece a razón de $2\frac{m}{min}$. Hallar la velocidad de cambio del área cuando el ángulo variable es de $\dfrac{\pi}{3}$, el primer lado mide $4m$ y el segundo mide $5m$.
(Sugerencia: El área de un triángulo de lados a y b se puede calcular por $A = \dfrac{ab\operatorname{sen}(\theta)}{2}$) siendo θ el ángulo comprendido por a y b)

Sean a y b las longitudes de dos lados del triángulo y θ el ángulo comprendido entre estos. Por la sugerencia $A = \dfrac{ab\operatorname{sen}(\theta)}{2}$ de donde

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{da}{dt}b\operatorname{sen}\theta + \frac{db}{dt}a\operatorname{sen}\theta + ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right]\ (*)$$

De los datos del problema se sigue que: $a = 4$; $\dfrac{da}{dt} = 3$; $b = 5$; $\dfrac{db}{dt} = -2$; $\theta = \dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\pi}{6}$

Sustituyendo en (*) se obtiene que $\dfrac{dA}{dt} \approx 5,64$

R/ El área cambia aproximadamente a razón de 5,64 $\frac{m^2}{min}$

6. Considere la función f definida por $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x+2}$; donde

$$f'(x) = \frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2} \text{ y } f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$$

a) Puntos de intersección con los ejes coordenadas

Nótese que el $D_f = \mathbb{R} - -2$

1) Intersección eje Y
Se toma $x = 0$ luego $y = -\dfrac{3}{2}$ y el punto de intersección corresponde a $(0, -\dfrac{3}{2})$

2) Intersección eje X
Se toma $y = 0$ luego $x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$ y los puntos de intersección son $(\sqrt{3}, 0)$ y $(-\sqrt{3}, 0)$

b) Puntos máximos y mínimos relativos y monotonía de f

Como $f'(x) = \dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$ los puntos críticos se obtienen cuando:

1) $f^{'}(x) = 0$; *ie*,

$$\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = -1$$

2) $f^{'}(x)$ se indefine. En este caso se tiene $x = -2$

Análisis de intervalos de crecimiento y decrecimiento

$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

De la tabla anterior podemos ver que:

- f es creciente en: $]-\infty, -3[\,;\,]-1, +\infty[$
- f es decreciente en: $]-3, -2[;\ ]-2, -1[$
- f tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = -1$

c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad de f

Como $f''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}$ los puntos de inflexión se obtienen cuando:

1) $f''(x) = 0$. En este caso no se obtienen valores.

2) $f''(x)$ se indefine. En este caso se tiene $x = -2$

Análisis de intervalos de crecimiento y decrecimiento

$-\infty$	-2	$+\infty$
$(x+2)^3$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$

De la tabla anterior podemos ver que:

- f es cóncava hacia abajo en: $]-\infty, -2[$
- f es cóncava hacia arriba en: $]-2, +\infty[$
- f no tiene puntos de inflexión pues $x = -2 \notin D_f$

d) Ecuaciones de las asíntotas

1) Asíntotas verticales

- $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-3}{x+2} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-3}{x+2} = -\infty$

Así $x = -2$ es asíntota vertical

2) Asíntotas horizontales

- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3}{x+2} = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3}{x+2} = +\infty$

Así no hay asíntotas horizontales

3) Asíntota oblicua

- $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{x^2-3}{x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x^2+2x} = 1$$

- $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3}{x+2} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-3-x^2-2x}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x-3}{x+2} = -2$$

Así la ecuación de la asíntota oblicua es $y = x - 2$

e) Cuadro de variación

$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow \cap$	$\searrow \cap$	$\searrow \cup$	$\nearrow \cup$

f) Trace la gráfica de f