INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Segundo Examen Parcial
Cálculo I

DURACIÓN: 3 HORAS

20 DE JUNIO DE 2015 PUNTAJE: 61 PUNTOS

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer, de manera clara y ordenada, todos los procedimientos que justifiquen correctamente la solución y la respuesta de cada uno de los ítems.
3. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración.
4. No se permite el uso de celulares.
5. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
6. La calculadora que puede utilizar es aquella que contiene solo las operaciones básicas.
7. La prueba debe resolverse individualmente.

---

1. Verifique que, para curva dada por $x^4 + y^4 = 16$, se cumple que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-48x^2}{y^7}$$

6 puntos

2. Calcule $f'(x)$ para la función f definida por $f(x) = \left(\frac{4}{x}\right)^{arctan\left(x^2-2x+3\right)}$; $x > 0$ 6 puntos

3. Calcule, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites:

   a) $\lim_{t\to 1}\left(\dfrac{t}{t-1}-\dfrac{1}{ln(t)}\right)$ 6 puntos

   b) $\lim_{y\to 5}(6-y)^{\dfrac{1}{y-5}}$

   5 puntos

4. Justifique si la función g, definida por $g(x)=x^{\frac{4}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}$, satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en $[0,3]$. En caso afirmativo determine un número real c que satisfaga la conclusión de dicho teorema. 5 puntos

5. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Un rectángulo tiene un vértice en $(0,0)$, un lado está en el eje X y el otro está en el eje Y. El vértice opuesto a $(0,0)$ está sobre la parábola $y=2x^2-9x+12$ con $0\leqslant x\leqslant 3$. Para dicho rectángulo ¿cuál es el área máxima posible? 6 puntos

   b) En un triángulo escaleno dos lados y el ángulo determinado por estos cambian con el tiempo. El ángulo aumenta a razón de $\frac{\pi}{6}\ \frac{Rad}{min}$; uno de los lados crece a razón de $3\frac{m}{min}$ y el otro decrece a razón de $2\frac{m}{min}$. Hallar la velocidad de cambio del área cuando el ángulo variable es de $\dfrac{\pi}{3}$, el primer lado mide $4m$ y el segundo mide $5m$.
   (Sugerencia: El área de un triángulo de lados a y b se puede calcular por $A=\dfrac{ab\,\mathrm{sen}(\theta)}{2}$) siendo θ el ángulo comprendido por a y b) 6 puntos

6. Considere la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+2}$; donde

$$f'(x)=\frac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2} \text{ y } f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$$

   a) Determine:
      1) Puntos de intersección con los ejes coordenadas 2 puntos
      2) Puntos máximos y mínimos relativos y monotonía de f 5 puntos
      3) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad de f 2 puntos
      4) Ecuaciones de las asíntotas 5 puntos
      5) Cuadro de variación 2 puntos

   b) Trace la gráfica de f 5 puntos