Proyecto MATEM-Cálculo

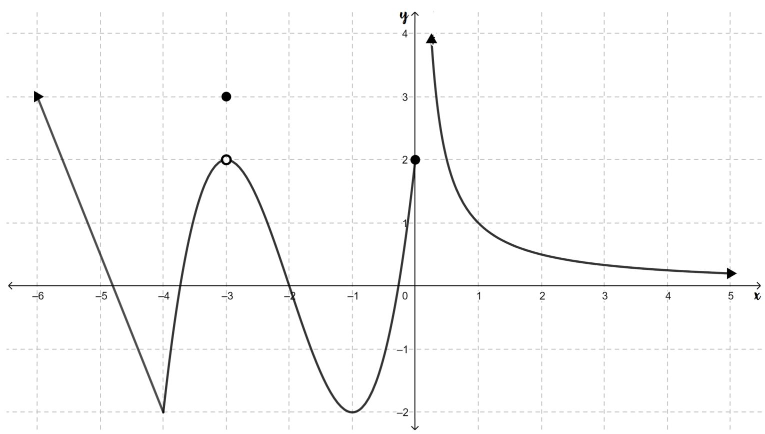
I Examen Parcial 2022- Solucionario

I parte: Selección única

1. D **2.** C **3.** A

II parte: Respuesta Corta

En la siguiente imagen se presenta la gráfica de una función f, determine lo que se le solicita. (10 puntos)



1. $f'(-1) = \underline{0}$
2. $f'(-5) = \underline{\frac{-5}{2}}$
3. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \underline{1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \underline{+\infty}$
5. $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \underline{2}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \underline{0}$
7. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$? No existe (opcional: porque los límites laterales son distintos)
8. La ecuación de la asíntota vertical. $\underline{x = 0}$
9. Un valor de x donde existe una discontinuidad evitable. $\underline{-3}$
10. Un valor del dominio donde la función es continua pero no es derivable. $\underline{-4}$

III parte: Desarrollo

Debe escribir en su cuaderno de examen todos los procedimientos que justifiquen su respuesta.

1. Calcule los siguientes límites:

A) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|1-x|}{(1-x)\sqrt{12-|x+6|}}$ (5 puntos)

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-(1-x)}{(1-x)\sqrt{12-(x+6)}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}\sqrt{12-(x+6)}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\sqrt{12-(x+6)}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

B) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x-1}{x-\sqrt{x^2+x+1}}$ (5 puntos)

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x-1}{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x-1}{x-|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-x-1}{x+x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(-1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1-\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-1-\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}{1+\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}}} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

C) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos(x)}{\pi - 3x}$ (7 puntos)

$$\begin{aligned} &Sea\ u = x - \frac{\pi}{3} \\ &u \to 0 \end{aligned}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1 - 2\cos\left(u + \frac{\pi}{3}\right)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1 - 2\left(\cos(u)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1 - 2\left(\cos(u)\,\frac{1}{2} - \operatorname{sen}(u)\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u) + \sqrt{3}\operatorname{sen}(u)}{-3u}$$

$$= \lim_{u \to 0} \left(\frac{-1}{3} \cdot \frac{1 - \cos(u)}{u} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\right)$$

$$= \frac{-1}{3} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones. No es necesario simplificar

A) $\cancel{f(x) = \sqrt{2x^2+1}\,\ln(4x)}$ $\quad f(x) = \sqrt{2x^2+1}\, e^{4x}$ (5 puntos)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}} \cdot 4x \cdot e^{4x} + \sqrt{2x^2+1} \cdot e^{4x} \cdot 4$$

Otra forma:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,(2x^2+1)^{\frac{-1}{2}} \cdot 4x \cdot e^{4x} + \sqrt{2x^2+1} \cdot e^{4x} \cdot 4$$

B) $g(x) = \dfrac{2^{\,3x-2}}{\tan(-x+1)}$ (5 puntos)

$$g'(x) = \frac{2^{\,3x-2}\ln(2)\cdot 3\cdot \tan(-x+1) - 2^{\,3x-2}\cdot \sec^2(-x+1)\cdot -1}{\left(\tan(-x+1)\right)^2}$$

3. Determine los valores de a y b de modo que la gráfica de la parábola $h(x) = x^2 + ax$ tenga, en $x = -3$, como recta tangente a la recta con ecuación $y = 2x + b$. (6 puntos)

Sea $h(x) = x^2 + ax$, entonces $h'(x) = 2x + a$.

Se desea colocar la recta tangente en $x = -3$, o visto de otra forma, en el punto $(-3, h(-3))$

Como la recta tangente tiene ecuación $y = 2x + b$, entonces el valor de la pendiente es 2, por tanto:

$$h'(-3) = 2$$

$$2(-3) + a = 2$$

$$a = 8$$

Como $(-3, h(-3))$ es el punto de tangencia, este pertenece a $h(x) = x^2 + 8x$ y a la recta $y = 2x + b$.

$h(-3) = (-3)^2 + 8(-3) = -15$

Eso indica que $(-3, -15)$ pertenece a la recta, por lo tanto:

$$2x + b = -15$$

$$2(-3) + b = -15$$

$$b = -9$$

Respuesta: $a = 8$ y $b = -9$