Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

PRIMER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I

Valor: 65 puntos. Tiempo máximo: 3 horas.

Sábado 5 de abril de 2014

INSTRUCCIONES GENERALES

- Antes de contestar lea cuidadosamente las instrucciones y los enunciados de las preguntas.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- **Este examen deberá ser resuelto en el cuaderno de examen. Escriba las respuestas de la parte de selección y de la parte de análisis de gráfica en su cuaderno de examen con la numeración correspondiente. En la parte de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.

I PARTE. Selección única. Valor: 5 puntos (un punto cada respuesta correcta).
Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios. Para cada uno de los enunciados se ofrecen cuatro opciones de respuesta de las cuales solamente una es correcta. Seleccione la respuesta y escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la letra correspondiente a la respuesta correcta.

1. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

I. Si $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$ entonces $f(2)=5$

II. Si f es estrictamente creciente entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

De ellas, con certeza son verdaderas

a. Solamente II
b. Solamente I
c. Ninguna
d. Ambas

2. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

   I. Si $y = 2$ es asíntota horizontal de la gráfica de f entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

   II. Si $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ entonces $x = 2$ es asíntota vertical de la gráfica de f.

De ellas, con certeza son verdaderas

a. Solamente II
b. Solamente I
c. Ninguna
d. Ambas

3. Considere dos funciones f y g tales que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = -4$ y analice las siguientes afirmaciones:

   I. $\lim_{x \to a} \left[f(x) g(x) \right] = -\infty$

   II. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

De ellas, con certeza son verdaderas

a. Solamente II
b. Solamente I
c. Ninguna
d. Ambas

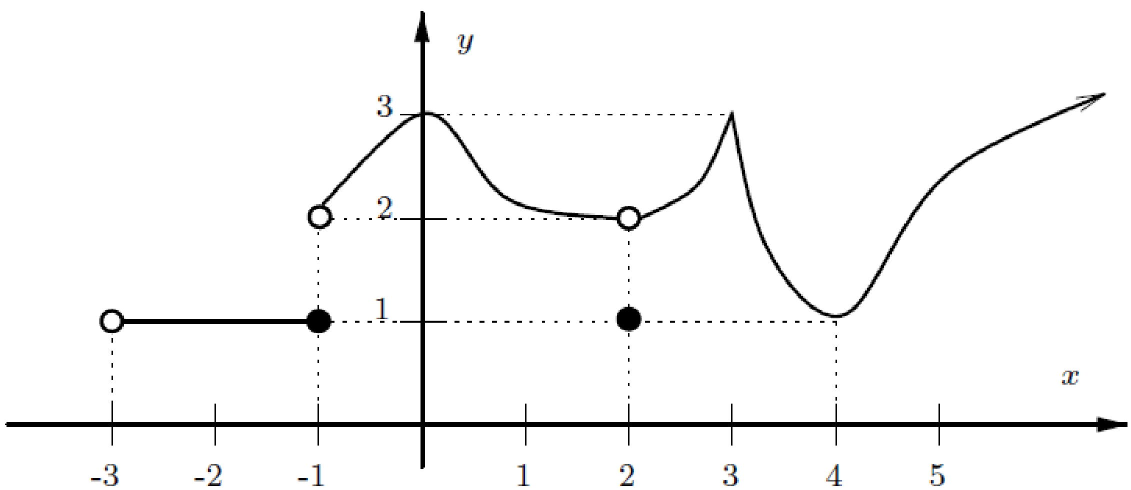
4. El valor de a para el cual $\lim_{x \to -2} \dfrac{2x^2 - a}{8 + x^3}$ existe corresponde a

a. 0
b. 4
c. 8
d. -8

5. Dada f una función definida en su máximo dominio tal que $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & \text{si } x>0 \\ x^2-k^2 & \text{si } x<0 \end{cases}$, entonces los valores de k para los cuales $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe corresponden a

a. únicamente 2
b. únicamente 4
c. 2 y -2
d. 4 y -4

II PARTE: Análisis de gráfica. Valor: 10 puntos (1 punto cada acierto).
<u>Instrucciones</u>: Considere la gráfica de la función f que se muestra a continuación. Escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la respuestaque completa correctamente cada afirmación en los ítemes del 1 al 5. En los ítemes del 6 al 10 calcule los límites si existen, de lo contrario justifique su respuesta.



1. Un valor de x para el cual la función presenta una discontinuidad no evitable corresponde a ____.

2. Un valor de x para el cual la función presenta una discontinuidad evitable corresponde a ____.

3. Un valor de x para el cual la función es continua pero no derivable corresponde a ______.

4. Un valor $a>0$ para el cual $f'(a)=0$ corresponde a ______________________________.

5. Un valor *a* para el cual $f'(a)<0$ corresponde a ________________________________.

Calcule, si existen, los siguientes límites :

6. $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x)$

7. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

8. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

9. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

III PARTE: Desarrollo Valor: 50 puntos.

<u>Instrucciones</u>: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios. Debe indicar todo el procedimiento que le permitió obtener la respuesta. Trabaje en forma clara y ordenada.

1. Calcule, si existen, los siguientes límites:

a. (4 puntos) $$\lim_{x\to -2} \frac{16+2x^3}{x^3-3x+2}$$

b. (6 puntos) $$\lim_{x\to 16} \frac{-\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{4-\frac{x}{4}}$$

c. (4 puntos) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-4x+\pi}$$

d. (6 puntos) $$\lim_{x\to 2} \frac{|3x-6|}{x^3-2x^2}$$

2. (7 puntos) Analice la continuidad de la función h cuyo criterio es $\mathrm{h(x)} = \frac{\mathrm{x^2-9}}{\mathrm{x^2-2x-3}}$. Determine el dominio, intervalos donde es continua y clasifique las discontinuidades en evitables o no evitables.

3. En cada uno de los siguientes casos determine $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$. No es necesario simplificar.

a. (7 puntos) $y = \frac{e^{3x^2+x}\ cot(-x)}{1+\sqrt{x}}$

b. (5 puntos) $y = \left[\sqrt[4]{x} - \left(\sqrt{2} + cos^4 x\right)^5\right]^{-1}$

4. (5 puntos) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de $y = 1 + 3x\cos(4x)$ en el punto de coordenadas $(0,1)$.

5. (6 puntos) Considere la función f definida en su máximo dominio tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{5x+3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{2x^2+x} - \sqrt{x+x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

Determine, si existen, las asíntotas horizontales de la curva $y = f(x)$.

Universidad de Costa Rica
Instituto Tecnológico de Costa Rica

PRIMER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO I
SOLUCIÓN

Valor: 65 puntos. Tiempo máximo: 3 horas.

Sábado 5 de abril de 2014

INSTRUCCIONES GENERALES

- Antes de contestar lea cuidadosamente las instrucciones y los enunciados de las preguntas.
- Utilice únicamente bolígrafo de tinta indeleble azul o negra para resolver este examen.
- Trabaje con el mayor orden y aseo posible. Si alguna **respuesta o procedimiento** está **desordenado**, **éste no se calificará.**
- **Este examen deberá ser resuelto en el cuaderno de examen. Escriba las respuestas de la parte de selección y de la parte de análisis de gráfica en su cuaderno de examen con la numeración correspondiente. En la parte de desarrollo debe aparecer todo el procedimiento** que justifique correctamente la solución y la respuesta de cada ítem.
- Recuerde que sólo puede utilizar calculadora que únicamente efectúe las operaciones básicas. No se permite el uso de calculadora científica de ningún tipo.
- La prueba debe resolverse individualmente.

I PARTE. Selección única. **Valor: 5 puntos.**

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes ejercicios. Para cada uno de los enunciados se ofrecen cuatro opciones de respuesta de las cuales solamente una es correcta. Seleccione la respuesta y escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la letra correspondiente a la respuesta correcta.

1. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   I. Si $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ entonces $f(2) = 5$

   II. Si f es estrictamente creciente entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

De ellas, son verdaderas

a. Solamente II
b. Solamente I
c. Ninguna
d. Ambas

2. Analice las siguientes afirmaciones referidas a una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

   I. Si $y = 2$ es asíntota horizontal de la gráfica de f entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

   II. Si $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ entonces $x = 2$ es asíntota vertical de la gráfica de f.

De ellas, son verdaderas

a. Solamente II
b. Solamente I
c. Ninguna
d. Ambas

3. Considere dos funciones f y g tales que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-4$ y analice las siguientes afirmaciones:

   I. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=-\infty$

   II. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

De ellas, son verdaderas

a. Solamente II
b. Solamente I
c. Ninguna
d. Ambas

4. El valor de a para el cual $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-a}{8+x^3}$ existe corresponde a

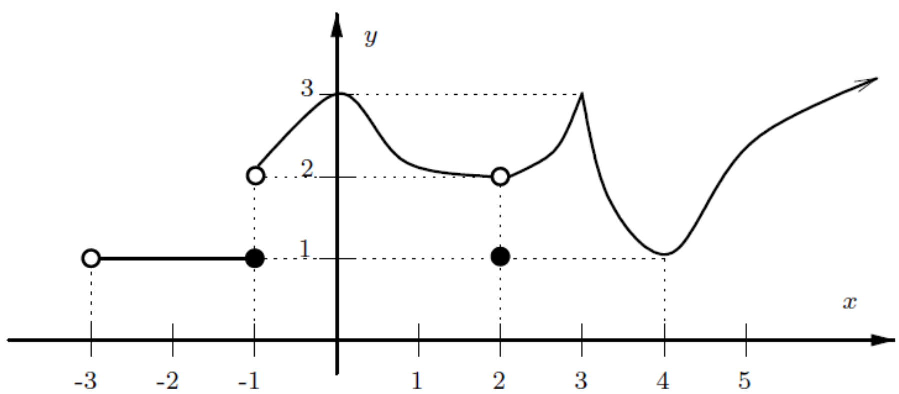
a. 0
b. 4
c. 8
d. -8

5. Si $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si\ x>0 \\ x^2-k^2 & si\ x<0 \end{cases}$, los valores de k para los cuales $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, corresponden a

a. únicamente 2
b. únicamente 4
c. 2 y -2
d. 4 y -4

II PARTE: Análisis de gráfica. **Valor: 10 puntos.**

Instrucciones: Considere la gráfica de la función *f* que se muestra a continuación e indique lo que se le solicita. Escriba en el cuaderno de examen el número de ítem y la respuesta correspondiente.



1. Un valor de *x* para el cual la función presenta una discontinuidad no evitable corresponde a ____-1_____

2. Un valor de *x* para el cual la función presenta una discontinuidad evitable corresponde a _____2____

3. Un valor de *x* para el cual la función es continua pero no derivable corresponde a ____3_____

4. Un valor $a>0$ para el cual $f'(a)=0$ corresponde a ____4_____

5. Un valor *a* para el cual $f'(a)<0$ corresponde a __cualquier valor en]0,2[∪]3,4[_____

Calcule, si existen, los siguientes límites :

6. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ __2______

7. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ____no existe____

8. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ____3____

9. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ____2____

10. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ___$+\infty$_____

III PARTE: Desarrollo. **Valor: 50 puntos.**

Instrucciones:

1. Calcule, si existen, los siguientes límites:

a. (4 puntos) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{16+2x^3}{x^3-3x+2}$

Solución

$$\lim_{x\to -2} \frac{16+2x^3}{x^3-3x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{2(2+x)(4-2x+x^2)}{(2+x)(1-2x+x^2)} = \lim_{x\to -2} \frac{2(4-2x+x^2)}{(1-2x+x^2)} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

b. (6 puntos) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{-\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{4-\frac{x}{4}}$

Solución

$$\lim_{x\to 16}\frac{-\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}}{4-\frac{x}{4}}=\lim_{x\to 16}\left[\frac{(2\sqrt[4]{x}-\sqrt{x})}{\frac{16-x}{4}}\frac{(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x})}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 16}\left[\frac{4\left(4\sqrt{x}-x\right)}{(16-x)\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)}\frac{\left(4\sqrt{x}+x\right)}{\left(4\sqrt{x}+x\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{4(16x-x^2)}{(16-x)\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt{x}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{4x(16-x)}{(16-x)\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt{x}+x\right)}=\lim_{x\to 16}\frac{4x}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}\right)\left(4\sqrt{x}+x\right)}$$

$$=\frac{64}{8\cdot 32}=\frac{1}{4}$$

c. (4 puntos) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-4x+\pi}$

Solución

Sea $u=x-\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-4x+\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{1-cos(u)}{-4\left(u+\frac{\pi}{4}\right)+\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{1-cos(u)}{-4u}=\frac{-1}{4}\lim_{u\to 0}\frac{1-cos(u)}{u}=0$$

d. (6 puntos) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|3x-6|}{x^3-2x^2}$

Solución

$$\lim_{x\to 2}\frac{|3x-6|}{x^3-2x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{3|x-2|}{(x-2)x^2}\ \lim_{x\to 2}\frac{|3x-6|}{x^3-5x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{|3x-6|}{(x^2+2x-1)(x-2)}$$

Se deben calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3|x-2|}{(x-2)x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)}{(x-2)x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x^2}=\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3|x-2|}{(x-2)x^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-3(x-2)}{(x-2)x^2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-3}{x^2}=-\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|3x-6|}{x^3-2x^2}$ no existe.

2. (7 puntos) Analice la continuidad de la función h cuyo criterio es $h(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$. Determine el dominio, intervalos donde es continua y clasifique las discontinuidades en evitables o no evitables.

Solución

Note que $h(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\frac{x+3}{x+1}$

Como h es una función racional de dominio: $\mathbb{R}-\{3,-1\}$ entonces es continua en los siguientes intervalos: $]-\infty,-1[,]-1,3[,]3,+\infty[$.

Clasificación de las discontinuidades en $x=-1$ y en $x=3$:

$\lim_{x\to-1^+}\frac{x+3}{x+1}=+\infty$, $\lim_{x\to-1^-}\frac{x+3}{x+1}=-\infty$ y $\lim_{x\to3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}$ por lo tanto en *x*= *-1* hay una discontinuidad no evitable y en *x* = *3* hay una discontinuidad evitable.

3. En cada uno de los siguientes casos determine $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$. No es necesario simplificar.

a. (7 puntos) $y=\frac{e^{3x^2+x}\ cot(-x)}{1+\sqrt{x}}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[e^{3x^2+x}(6x+1)cot(-x)+e^{3x^2+x}csc^2(-x)\right]\left(1+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{3x^2+x}cot(-x)}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$$

b. (5 puntos) $y=\left[\sqrt[4]{x}-\left(\sqrt{2}+cos^4x\right)^5\right]^{-1}$

Solución

$$\frac{dy}{dx}=-\left[\sqrt[4]{x}-\left(\sqrt{2}+cos^4x\right)^5\right]^{-2}\left[\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-5\left(\sqrt{2}+cos^4x\right)^4(4cos^3x)(-senx)\right]$$

4. (5 puntos) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de $y=1+3x\cos(4x)$ en el punto de coordenadas $(0,1)$.

Solución:

Como $y=1+3x\ cos(4x)\to y'=3cos(4x)-12x\ sen(4x)$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(0,1)$ es: $m = y\prime(0) = 3 - 0 = 3$

La pendiente de la recta normal a la curva en el punto $(0,1)$ es: $m_N = \frac{-1}{3}$
La ecuación de la recta normal a la curva en el punto $(0,1)$ es: $y = \frac{-1}{3}x + 1$

6. (6 puntos) Considere la función f definida en su máximo dominio tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{5x+3x^2} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{2x^2+x} - \sqrt{x+x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Determine, si existen, las asíntotas horizontales de la curva $y = f(x)$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-1}{5x+3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x}+3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{x+x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-(x+x^2)}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x+x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - x\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = +\infty$$

Por lo tanto, la única recta horizontal que es asíntota de la gráfica de $y = f(x)$ es la de ecuación $y = \frac{2}{3}$